Reiner Winter

Grundbegriffe der Mengenlehre

1. Der Mengenbegriff

Die Mengenlehre wurde von Georg Cantor (1845-1918) begründet. Im Jahre 1895 gab er die folgende, berühmt gewordene Begriffsbestimmung der Menge an:

> Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.
>
> Cantor, G., Abhandlungen, Hildesheim 1962, S. 282

Beispiele für Mengen sind:

a) die Menge aller Planeten unseres Sonnensystems
(9 Elemente: Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto),

b) die Menge aller Felder eines Schachspiels
(64 Elemente: von A1 bis H8),

c) die Menge aller ungeraden Zahlen: 1, 3, 5, usw.
(Unendlich viele Elemente),

Beispiele für Dinge, die nach Cantor keine Mengen sind:

e) eine Menge Butter
(hat keine bestimmten wohlunterschiedenen Elemente),

f) eine Menge Arbeit
(hat keine bestimmten wohlunterschiedenen Elemente),

f) die Zahl 1.000.000
(ist keine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Elementen, sondern eine abstrakte Größenvorstellung, die nicht verwechselt werden darf mit einer Menge von 1.000.000 Menschen beispielsweise),

2. Schreibweise für Mengen und Elemente

Wir bezeichnen Mengen mit großen lateinischen Buchstaben A, B, C,... und wählen bei der Vorstellung ihrer Elemente die beiden folgenden Formen:

a) ie aufzählende Form:

Wenn man z.B. die Planeten unseres Sonnensystems zu einer Menge M zusammenfassen möchte, so schreiben wir dies in der folgenden Form auf:

M = {Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto}

Lies: M ist die Menge, die aus den Elementen: Merkur, Venus, ... , Pluto besteht.

Die Elemente werden also einfach der Reihe nach aufgezählt, durch ein Komma voneinander getrennt und mit einer geschweiften Klammer als Menge kenntlich gemacht. Die Reihenfolge der Elemente ist dabei egal.

b) die beschreibende Form:

Insbesondere Bei Mengen mit unendlich vielen Elementen, z.B. der Menge der ungeraden Zahlen, ist eine vollständige Aufzählung der Elemente nicht möglich. Die Elemente solcher Mengen müssen durch Eigenschaften charakterisiert und beschrieben werden. Dies geschieht für die ungeraden Zahlen z.B. so:

U = {x | x ist eine ungerade Zahl}

Lies: U ist die Menge aller Elemente x, für die gilt: x ist eine ungerade Zahl“

Merke: Das Symbol {x | ... } ist eine Abkürzung für: „die Menge aller x, für die gilt:...“

3. Verhältnis von Menge und Element

Wenn wir zum Ausdruck bringen wollen, dass die Zahl 7 eine ungerade Zahl ist, also zur Menge U aller ungeraden Zahlen gehört, so schreiben wir dies in der folgenden Form:

$7 \in U$ Lies: „7 ist ein Element der Menge U“

Für die Zahl 12 aber, die nicht ungerade ist, schreiben wir:

$8 \notin U$ Lies: „8 ist <u>kein</u> Element der Menge U“

Damit können wir die Schreibweise der Elementbeziehung allgemein definieren:

> **Definition** (*Mengenschreibweise*)
>
> 1. Wenn A eine Menge ist und a ist ein Element von A, dann schreiben wir: $a \in A$
> 2. Wenn A eine Menge ist und a ist <u>kein</u> Element von A, dann schreiben wir: $a \notin A$

Beispiele:

Seien A = {x | x ist eine Zahl zwischen 0 und 1}, B = {x | x ist eine Farbe} und
C = {x | x ist eine französische Stadt} gegeben, dann können wir die folgende Zuordnungen schreiben:

a) $\frac{4}{5} \in A$ b) $-\frac{1}{2} \notin A$ c) $1{,}02 \notin A$ d) Grün $\in$ B e) Hell $\notin$ B
f) Liège $\notin$ C g) Cognac $\in$ C h) $0{,}99 \in A$ i) Schwarz $\in$ B j) Louvre $\notin$ C.

4. Die „einelementige Menge“ und die „leere Menge“

Nach der Cantorschen Mengenerklärung muss eine Menge mindestens zwei Elemente enthalten, denn es heißt dort, dass die Elemente „bestimmt“ und „wohlunterschieden“ sein müssen.
Betrachten wir aber einmal die folgenden Mengenbildungen:

A = {x | x ist der dritte Teil von 42}
B = {x | x ist kleiner als 1 und größer als 5}

Für A gibt es genau eine Zahl, nämlich x = 14, die die Bedingung erfüllt. Wir müssten also schreiben: A = {14}. Für B gibt es sogar überhaupt keine Zahl x, die die vorgegebene Bedingung erfüllt. Wir müssten hier schreiben: B = {}, also eine leere Klammer, um anzudeuten, dass B kein Element x enthält. Dies widerspricht jedoch sehr der Alltagsvorstellung von einer Menge, denn mit dem Wort „Menge“ verbinden wir stets eine „Vielheit“. Und eine Menge mit nur einem Element oder mit keinem Element ist ein Widerspruch zum Cantorschen Mengenbegriff aber auch zur alltäglichen Mengenvorstellung.

Für den weiteren Aufbau der Mengenlehre ist es aber - wie die Beispiele zeigen -sinnvoll, die Cantorsche Mengenerklärung um zwei Fälle zu erweitern:

> **Definition** (*Erweiterungsdefinition zum Cantorschen Mengenbegriff*)
>
> 1. Unter einer *„einelementige“ Menge M* verstehen wir eine Menge, die genau ein Element a hat.
>
>   Wir schreiben dann: M = {a}.
>
> 2. Unter der *„leeren“ Menge* verstehen wir diejenige Menge (!), die *kein* Element hat.
>
>   Wir symbolisieren die „leere“ Menge mit einer leeren Mengenklammer: {}.

5. Die Grundmenge

Wenn wir uns mit unterschiedlichen Mengen beschäftigen, so legen wir von vornherein eine Menge fest, aus der alle infrage kommenden Elemente stammen. Diese Menge heißt Grundmenge und wird mit dem Symbol $\mathbb{G}$ bezeichnet.

6. Einige wichtige Zahlenmengen

a) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen:

Die Zahlen des Zählens: 1, 2, 3, 4, 5, ... waren in der Geschichte der Mathematik die ersten Zahlen, mit denen unsere Vorfahren umgegangen sind. Sie erscheinen dem Menschen ganz „natürlich“ und heißen von daher auch: „Natürliche Zahlen“. Wir definieren daher:

> Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ heißt Menge der natürlichen Zahlen.

Bemerkungen:

1. Die Zahl „Null“ ist nach Definition keine natürliche Zahl, es gilt also $0 \notin \mathbb{N}$
2. Die „unechten Brüche“ z.B. $\frac{5}{1}, \frac{32}{8}, \frac{84}{12}$ u.s.w. sind natürliche Zahlen, weil ihr Rechenergebnis eine natürliche Zahl ist, z.B. $8 = \frac{56}{7} \in \mathbb{N}$

b) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen:

Wenn wir zu den natürlichen Zahlen noch die Zahl „Null“ und alle Gegenzahlen von $\mathbb{N}$ (= die negativen Zahlen) hinzufügen, so entsteht eine Zahlenmenge, die wir die Menge der ganzen Zahlen nennen und mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen. Wir definieren also:

> Die Menge $\mathbb{Z} = \{... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ heißt Menge der ganzen Zahlen.

Bemerkung

Auch hier gilt, dass „unechte Brüche“ wie z.B. $-\frac{35}{7}, \frac{125}{5}, -\frac{121}{11} = -11 \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen sind.

c) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:

Wenn wir zu der Menge $\mathbb{Z}$ noch sämtliche positive und negative Bruchzahlen, wie $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}$ usw., hinzufügen, so erhalten wir die Menge **aller** (echten und unechten) Bruchzahlen, die wir mit dem Symbol $\mathbb{Q}$ bezeichnen. Diese Menge aller Bruchzahlen können wir aber nicht so einfach angeben wie die beiden vorigen Mengen, sondern müssen bei der Darstellung eine Art Tabelle verwenden:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{array}{llllll} 0, & \pm\frac{1}{1}, & \pm\frac{1}{2}, & \pm\frac{1}{3}, & \pm\frac{1}{4}, & \pm\frac{1}{5}, \quad ... \\ & \pm\frac{2}{1}, & \cancel{\pm\frac{2}{2}}, & \pm\frac{2}{3}, & \cancel{\pm\frac{2}{4}}, & \pm\frac{2}{5}, \quad ... \\ & \pm\frac{3}{1}, & \pm\frac{3}{2}, & \cancel{\pm\frac{3}{3}}, & \pm\frac{3}{4}, & \pm\frac{3}{5}, \quad ... \\ & \pm\frac{4}{1}, & \cancel{\pm\frac{4}{2}}, & \pm\frac{4}{3}, & \cancel{\pm\frac{4}{4}}, & \pm\frac{4}{5}, \quad ... \\ & \pm\frac{5}{1}, & \pm\frac{5}{2}, & \pm\frac{5}{3}, & \pm\frac{5}{4}, & \cancel{\pm\frac{5}{5}}, \quad ... \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right\}$$

Wir sehen, dass mit diesem Schema *alle* möglichen Bruchzahlen erfasst werden. Die mehrfach vorkommenden Zahlen können wir streichen. Die Menge all dieser Bruchzahlen (echte und unechte) nennen wir die Menge der *rationalen* Zahlen. Der Begriff „rational“ leitet sich von dem lateinischen Wort „ratio“ = Vernunft her. Rationale Zahlen sind demnach „durch Vernunft erfassbare“ Zahlen (im Gegensatz zu den später noch zu behandelnden nichtrationalen = *irrationalen* Zahlen).
Wir sehen, dass alle rationalen Zahlen, also alle (echten und unechten) Bruchzahlen, in folgenden Weise dargestellt werden können:

Eine rationale Zahl x ist ein Bruch der folgenden Form:

$x = \frac{z}{n}$, wobei der Zähler z eine *ganze* Zahl und der Nenner n eine *natürliche* Zahl ist.

So können wir jetzt die Menge der rationalen Zahlen etwas einfacher definieren:

> Die Menge $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen.

Bemerkungen:

$\mathbb{Q}$ ist also die Menge aller Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen. Zur Menge $\mathbb{Q}$ gehören also:

a) alle ganzen Zahlen, z.B.: $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$, $17 = \frac{17}{1}$

b) alle „echten“ Brüche, z.B.: $\frac{2}{3}$, $-\frac{9}{2}$, $\frac{101}{10}$, $\frac{5}{6}$

c) alle abbrechenden Dezimalzahlen, z.B.: $2{,}7 = \frac{27}{10} - 15{,}678 = \frac{15678}{1000}$

d) alle periodischen Dezimalzahlen, z.B.:

$0{,}333... = 0,\overline{33} = \frac{1}{3}$, $0{,}767676... = 0,\overline{76} = \frac{76}{99}$, $0{,}814814814... = 0,\overline{814} = \frac{814}{999}$

7. Die Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B heißen gleich oder „dieselbe“ Menge, wenn A und B genau dieselben Elemente enthalten. So sind beispielsweise die folgenden Mengen gleich:

$A = \{x \mid x^2 = 9\}$ und $B = \{-3,+3\}$.
Wir können also die Gleichheit von Mengen wie folgt definieren:

Definition (*Gleichheit von Mengen*)

Zwei Mengen A und B heißen gleich, in Zeichen A = B, genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten, d.h. wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist und umgekehrt.

Aus der Definition der Gleichheit ergeben sich drei wichtige Folgerungen für Mengen:
Folgerungen:

1. Die Reihenfolge der Elemente ist für die Bestimmung der Menge unwesentlich
   Beispiele: a) $\{a, b, c, d\} = \{c, b, d, a\}$ b) $\{-2, -1, 0, 1\} = \{0, -2, 1, -1\}$
2. Dieselben Elemente können in unterschiedlichen Formen geschrieben werden, ohne dass sich die Menge dadurch ändert.
   Beispiele: a) $\{\frac{52}{13}, 2^3, 3\cdot 5\} = \{4, 8, 15\}$ b) {Komponist von „Rigoletto“} = {Verdi}
3. Wenn dieselben Elemente mehrfach genannt werden, so können die Mehrfachnennungen wegfallen.
   Beispiele: a) $\{x, y, z, x, y, x,\} = \{x, y, z\}$ b) $\{1, \frac{70}{35}, \sqrt{1}, 2, 1^5, 4-3, 1+1\} = \{1, 2\}$

8. Die Teilmengenbeziehung

Wenn alle Elemente einer Menge A auch in einer größeren Menge B enthalten sind, so sagen wir, dass A eine *Teilmenge* von B ist. So ist z.B. die Menge A = {Erde, Mars} eine Teilmenge der Menge B = {x | x ist ein Planet unseres Sonnensystems}.

Wir können also definieren:

Definition (*Teilmenge*)

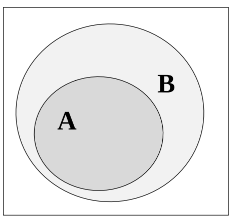
Die Menge A heißt (echte) Teilmenge der Menge B, in Zeichen $A \subset B$, wenn gilt:

1. Alle Elemente von A sind auch Elemente von B und 2. $A \neq B$.

Wenn A keine Teilmenge von B ist, so schreiben wir $A \not\subset B$

Wir können diese Teilmengenbeziehung zweier Mengen einmal anhand eines Kreis-Diagramms veranschaulichen: wählt man für die Grundmenge G ein Rechteck und für die Menge A und B geometrisch zwei Kreisflächen, dann ist die die Menge A darstellende Fläche völlig in der die Menge B darstellende Fläche enthalten. Die Menge B umfasst also die Teilmenge A:

$A \subset B$



$\mathbb{G}$

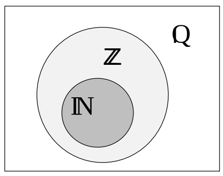
Wir nennen eine solche graphische Darstellung von Mengen ein **Venn-Diagramm** oder ein **Euler-Diagramm** nach den beiden Logikern John Venn (1834 - 1923) und Leonard Euler (1707-1783).

Bemerkung:

Wir kennen aus der Algebra das Zeichen „≤“ für „kleiner *oder* gleich“. So bedeutet $x \leq 5$, dass die Zahl x entweder kleiner oder gleich 5 ist.
Analog dazu schreiben wir auch in der Mengenlogik das Zeichen: „⊆“, um mit der Formalisierung $A \subseteq B$ auszudrücken, dass A entweder eine (echte) Teilmenge von B oder *gleich* B ist.
Beispiele:

a) $\{2, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\} \subset \mathbb{Q}$
c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \subseteq \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$
d) $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$ aber: $1 \in \{1, 2, 3\}$ (!)
e) $\{0, 1, 2\} \not\subset \{1, 2, 3, 4\}$
f) $\{-1, 0\} \subseteq \{-2, -1, 0\}$
g) $\{-10\} \subset \mathbb{Z}$, aber $-10 \in \mathbb{Z}$
h) $\{0\} \not\subset \mathbb{N}$
i) $\{-23{,}471\} \subseteq \mathbb{Q}$
j) $\{x \mid x^2 = 9\} \not\subset \mathbb{N}$
k) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
l) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

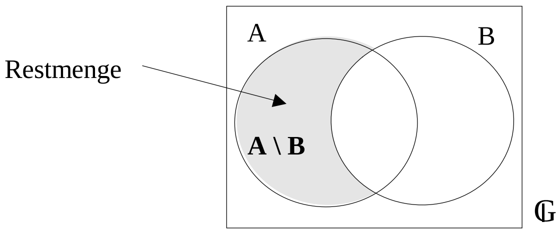
Aus den letzten beiden Beziehungen können wir für die drei Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ das folgende Diagramm betrachten:



$\mathbb{Q}$ stellt hier die Grundmenge dar.

9. Die Restmenge

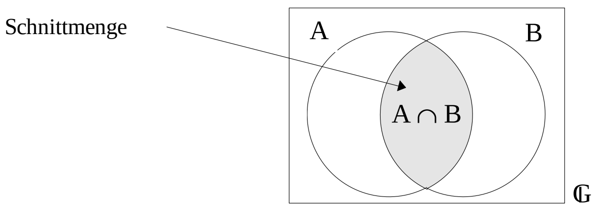
Wen man aus einer Menge A alle diejenigen Elemente herausnimmt, die auch noch zu einer Menge B gehören, so nennen wie die Menge, die dabei übrig bleibt, die Restmenge von A zu B. Sie wird mit dem Symbol A \ B (*lies: A ohne B*) bezeichnet. Dazu ein Venn-Diagramm:



Definition (*Restmenge*)
Wenn A und B zwei Mengen sind, dann heißt die Menge: **A \ B** $=\{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ die **Restmenge** von A zu B. Das Zeichen A \ B wird gelesen: „A ohne B“.

10. Die Schnittmenge

Die Menge aller Elemente, die sowohl zu einer Menge A, als auch zu einer Menge B gehören, heißt die Schnittmenge von A und B. Sie wird mit dem Symbol $A \cap B$ (*lies: A geschnitten B)* bezeichnet.



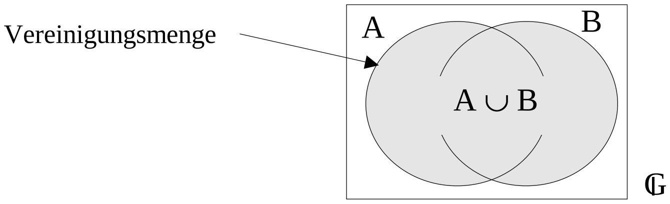
Definition (*Schnittmenge*)
Wenn A und B zwei Mengen sind, dann heißt die Menge: $\mathbf{A \cap B} =\{x \mid x \in A \text{ **und** } x \in B\}$ **Schnittmenge** von A und B. Das Zeichen $A \cap B$ wird gelesen: „A geschnitten B“.

Bemerkung:

1. Das Wort „und“ in der Definition bedeutet: „sowohl als auch“, es muss also *beides* gelten.
2. Laut Definition gilt: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

11. Die Vereinigungsmenge

Fasst man die Menge aller Elemente zweier Mengen A, B zu einer großen Gesamtmenge zusammen, so heißt diese Gesamtmenge die Vereinigungsmenge von A und B. Sie wird mit dem Symbol $A \cup B$ (*lies: A vereinigt mit B)* bezeichnet.



> **Definition** (*Vereinigungsmenge*)
>
> Wenn A und B zwei Mengen sind, dann heißt $\mathbf{A \cup B} = \{x \mid x \in A$ **oder** $x \in B\}$ die **Vereinigungsmenge** von A und B. Das Zeichen $A \cup B$ wird gelesen: „A vereinigt mit B“.

Bemerkung:

1. Das Wort „oder“ in der Definition wird nicht als „entweder-oder“ verstanden, sondern im einschließenden Sinne: x gehört zu A oder x gehört zu B oder x gehört zu beiden, also zu $A \cap B$.
2. Laut Definition gilt: $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

12. Die Größer-Kleiner-Ordnung in $\mathbb{Q}$

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist hinsichtlich der Zahlengröße „geordnet“, d.h. von beliebigen rationalen Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt genau einer der folgenden drei Fälle:

I. $a > b$: „a ist größer als b“
II. $a = b$: „ a ist gleich b“
III. $a < b$: „a ist kleiner als b“

Mit Hilfe dieser Ordnungsrelation können wir nun die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ definieren:

1. $\mathbb{Q}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{Q}$ und $x > 0\}$ die Menge der *positiven* rationalen Zahlen.

2. $\mathbb{Q}^- = \{x \mid x \in \mathbb{Q}$ und $x < 0\}$ die Menge der *negativen* rationalen Zahlen.

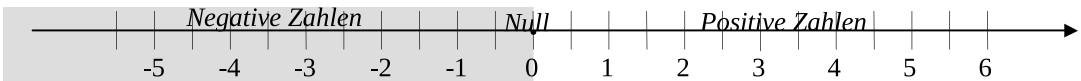
4. $\mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ die Menge der *nichtnegativen* Zahlen. (Hier gehört die Null mit dazu!)

5. $\mathbb{Q}_0^- = \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ die Menge der *nichtpositiven* Zahlen. (Hier gehört die Null auch mit dazu!)

6. Analog werden auch die Mengen $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^+$, $\mathbb{Z}_0^-$ und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert. Dabei gilt: $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.

13. Die graphische Darstellung der Menge $\mathbb{Q}$

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen kann durch eine bekannte „Zahlengerade“ graphisch dargestellt werden:



14. Intervalle in ℚ

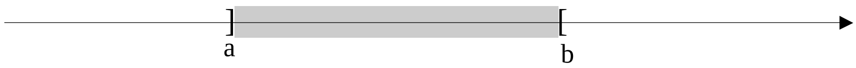
Zusammenhängende Teilmengen von ℚ, z.B. alle Zahlen, die zwischen −1 und 2 liegen, heißen Intervalle von ℚ. Wir definieren:

1. Das offene Intervall:

Definition (*offenes Intervall*)

Wenn a und b zwei rationale Zahlen sind, wobei a < b gilt, dann heißt die Menge aller rationalen Zahlen, die *zwischen* a und b liegen *„das offene Intervall von a bis b“* und wird mit dem Symbol]a, b[bezeichnet:

]a, b[= {x | x ∈ ℚ und a < x und x < b} heißt *offenes* Intervall von a bis b



Bemerkung:

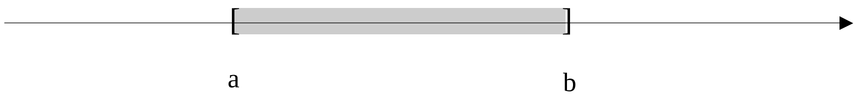
Die beiden Intervallgrenzen a und b gehören nicht mit zum offenen Intervall: a ∉]a, b[und b ∉]a, b[. Dies bedeutet, dass das offene Intervall]a, b[kein kleinstes und kein größtes Element hat.

2. Das abgeschlossene Intervall:

Definition (*abgeschlossenes Intervall*)

Wenn zu dem offenen Intervall]a, b[noch die beiden Grenzen a und b hinzugenommen werden, so erhalten wir *„das abgeschlossene Intervall von a bis b“* und dies wird mit dem Symbol [a, b] bezeichnet. Wir können nun mit Hilfe des „≤“- Zeichens genauer definieren:

[a, b] = {x | x ∈ ℚ und a ≤ x und x ≤ b} heißt *abgeschlossenes* Intervall von a bis b



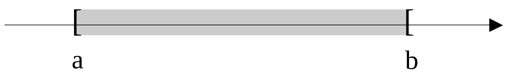
Bemerkung:

Die beiden Intervallgrenzen a und b gehören jetzt mit zum abgeschlossenen Intervall: a ∈ [a, b] und b ∈ [a, b]. Dies bedeutet, dass das abgeschlossene Intervall [a, b] ein kleinstes und ein größtes Element hat, nämlich die beiden Intervallgrenzen a und b.

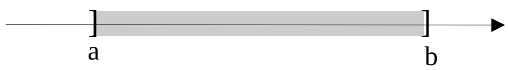
3. Sonderfälle

Man kann auch *einseitig* offene Intervalle definieren, die *halb*offen genannt werden. Die folgenden Intervalle:

a) [a, b[= {x | x ∈ ℚ und a ≤ x ∧ x < b}



b)]a, b] = {x | x ∈ℚ und a < x ∧ x ≤ b}



heißen halboffen bzw. halbgeschlossene Intervalle. Und zwar nennt man das Intervall (a) auch *rechtsoffen* während (b) *linksoffen* genannt wird.

4. Das Symbol „∞“ und „unendliche“ Intervalle

Wenn wir einmal alle rationalen Zahlen betrachten, die größer oder gleich 1 sind, so erhalten wir das folgende Bild:

Wir nennen eine solche Teilmenge von ℚ ein unendliches Intervall und bezeichnen es mit dem Symbol [1,∞[. (*lies: das halboffene Intervall von 1 bis „unendlich“.*)

Wichtige Bemerkung zum Symbol „∞“

Das Symbol „∞“ (*lies: „unendlich“*) muss genau interpretiert werden, sonst entstehen damit Missverständnisse. Das Symbol „∞“ bezeichnet *keine* rationale Zahl, erst recht nicht die „größte rationale Zahl“, denn es gibt in $\mathbb{Q}$ keine größte Zahl, weil wir ja zu jeder noch so großen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ immer wieder eine noch größere Zahl $y = x + 1 \in \mathbb{Q}$ finden kann. Insofern können wir folgendes schreiben: $\infty \notin \mathbb{Q}$. Das Zeichen „∞“ hat in der Mathematik die *prozesshaft*, anschauliche Bedeutung, dass wir eine Folge von Zahlen betrachten, die größer und größer werden, etwa 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000 usw. Wir *denken* uns also einen Fortschreitungsprozess von jeweils größeren Zahlen, der *immer weiter* geht. In dem Ausdruck „immer weiter“ liegt das Denken des Unendlichen in der Mathematik.

Im Intervall [1,∞[hat das „Unendlich“ - Symbol „∞“ die folgende Bedeutung:
Zu *jeder* Zahl b >1 gehört auch *jede* größere Zahl z > b zu dem Intervall [1,∞[.

Wir können mit dem Symbol „∞“ („unendlich“) nun die folgenden „unendlichen“ Intervalle definieren:

$[a, \infty[\; = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ und } x \geq a\}$

$]a, \infty[\; = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x > a\}$

$]-\infty, b[\; = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < b\}$

$]-\infty, b] = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x \leq b\}$

$]-\infty, +\infty[\; = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$!

Übungen I

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Objekte im Sinne von Cantor Mengen sind:
   a) die Stunden in einem Jahr | b) der Fruchtsaft in einer Apfelsine
   c) das Holz eines Baumes | d) die roten Blutkörperchen im Körper eines Menschen
   e) der Eisenanteil im Blut | f) die Gegenstände der Erde
   g) das Wasser eines Flusses | h) die Eigenschaften eines Menschen

2. Gegeben seien die vier folgenden Mengen:

$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$, $D = \{-1, 1\}$

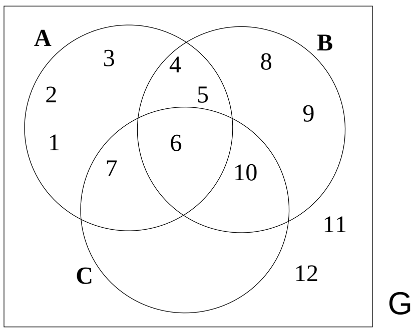
Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an:

a) $A \setminus B$ b) $B \setminus C$ c) $A \cap B$ d) $A \cap C$ e) $B \cap D$

f) $C \cup D$ g) $C \setminus D$ h) $D \setminus C$ i) $A \cup D$ j) $(A \setminus B) \cup D$

k) $(B \cup D) \setminus A$ l) $(B \setminus C) \setminus D$

3. Gegeben sei das folgende Venn-Diagramm:



3.1. Geben Sie die Mengen in aufzählender Form an:

a) $(A \cup B) \setminus C$ b) $(B \cap D) \cup A$

c) $(B \cap C) \setminus A$ d) $(A \setminus B) \cup C$

e) $A \setminus (B \cup C)$ f) $\mathbb{G} \setminus (B \cup C)$

g) $\mathbb{G} \setminus (A \cap B)$ h) $\mathbb{G} \setminus (A \cap B \cap C)$

i) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ j) $C \cup (B \setminus A)$

3.2. Drücken Sie die folgenden Mengen mit Hilfe von A, B, C und $\mathbb{G}$ aus:

a) $\{6, 10\}$ b) $\{4, 5, 6, 7\}$ c) $\{8, 9\}$ d) $\{1, 2, 3, 10\}$ e) $\{6, 8, 9\}$ f) $\{4, 5, 7\}$

g) $\{11, 12\}$ h) $\{7, 11, 12\}$ i) $\{6, 10\}$ j) $\{4, 5, 10\}$ k) $\{1, 2, 3, 8, 9, 11, 12\}$

4. Gegeben sei die Grundmenge $\mathbb{G} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Darin sind folgende Mengen enthalten:

   $A = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 9, 11\}$, $C = \{1, 9, 10\ 11\}$

   Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit allen drei Mengen A, B und C und tragen sie die Elemente genau in die entsprechenden Flächen ein.

Übungen II

1. Entscheiden Sie, welches der folgenden Zeichen: $\in$, $\notin$, $\subset$; $\not\subset$, $=$, in dem schraffierten Feld zwischen den Ausdrücken stehen muss:

   a) $5 \;\square\; \{5\}$ b) $2 \;\square\; \{12, 20\}$ c) $4{,}5 \;\square\; \mathbb{Z}$ d) $\{-1, 3\} \;\square\; \mathbb{Q}$ e) $3, 4 \;\square\; \mathbb{Q}_0^+$

   f) $0 \;\square\; \mathbb{Z}^-$ g) $\{-1\} \;\square\; \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ h) $\frac{42}{3} \;\square\; \mathbb{N}$ i) $]0, \infty[\;\square\; \mathbb{Q}^+$ j) $\{0, 2\} \;\square\; \mathbb{Z}$

   k) $[1, 5] \;\square\; \mathbb{N}$ l) $]-3, 0[\;\square\; \mathbb{Z}^-$ m) $[0, 1] \;\square\; \mathbb{Q}^+$ n) $[1, 5] \;\square\; \{1, 5\}$ o) $\frac{1}{2} \;\square\; [0, 1] \cap \mathbb{Z}$

   p) $\{-3, -4\} \;\square\;]-5, -3] \cap [-4, -2[$ q) $\{0, 1, 2\} \;\square\; [0, 2[\cap [\frac{1}{2}, 2] \cap \mathbb{Z}$.

2. Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an:

   a) $[1, 5[\cap \mathbb{Z}$ b) $[-1, 1] \cap \mathbb{N}$ c) $[-1, -\frac{1}{2}] \cap [-\frac{1}{2}, 0[$ d) $]-\infty, 5[\cap \mathbb{N}$

   e) $]-1, \infty[\cap \mathbb{Z}^-$ f) $]-5, 1[\cap \mathbb{Z}$ g) $\mathbb{Q}_0^+ \cap \mathbb{Q}_0^- \cap \mathbb{Z}$ h) $]-3, 3[\cap \mathbb{Z}^-$

   i) $]-\infty, 3] \cap]-4, \infty[\cap \mathbb{Z}$ j) $]-\infty, 1[\cap]-6, \infty[\cap \mathbb{Z}^-$.

3. Stellen Sie die folgenden Mengen an der Zahlengeraden dar:

   a) $[-5, 3] \cap]-2, 4]$ b) $]-\infty: 2] \cup [-6, 3[$ c) $[-2, \frac{5}{2}[\cap]1, \frac{7}{2}[$

   d) $]-6, \frac{5}{2}] \cap \mathbb{Z}$ e) $[-2, 0[\cup]0, 3]$ f) $]-\infty, 3[\cap]-2, 4]$

   g) $]-\infty, -1[\cup]2, \infty[$ h) $\mathbb{Q} \setminus]-1, 2]$ i) $[0, 4] \setminus [2, 5]$

   j) $\mathbb{Q} \setminus \{-1, 2, 3\}$ k) $]-\infty, 5] \setminus]-\infty, 0]$ l) $(\mathbb{Q} \setminus]-\infty, -2[) \cap \mathbb{Z}$.

4. Das Wort „und“ wird in der Mengenlehre mit dem Zeichen „$\wedge$“ und das Wort „oder“ mit dem Symbol „$\vee$“ abgekürzt. Also:

   $\wedge$ = *und (sowohl als auch)* , $\vee$ = *oder (im einschließenden Sinn).*

   Lesen Sie die folgenden Mengen und geben Sie in aufzählender Form an:

   a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{5}{2} < x \leq \frac{3}{2}\}$

   c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5 \vee x > 8\}$ d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -4 \vee x > 1\}$

   e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < -2 \wedge x \leq 3\}$ f) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 2 \wedge x < 7\}$

   g) $\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2 \cdot n \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\}$ h) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2 \cdot n + 1 \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < 10\}$

   i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = n^2 \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < 6\}$ j) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n < 8\}$.

5. Geben Sie die folgenden Mengen in beschreibender Form an:

   a) $\{5, 10, 15, 20, 25\}$ b) $\{0, -2, -4, -6, -8, -10\}$ c) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

   d) $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}\}$ e) $\{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}\}$ f) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

   g) $\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}\}$ h) $\{1, 8, 27, 64, 125, 216\}$ i) $\{1, 16, 81, 256, 525\}$.