Quadratische Gleichungen: Die Herleitung der "p-q-Formel"

Konkret:	Allgemein:
$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \vert -2$	$x^2 + px + q = 0 \quad \vert -q$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x = -2 \quad \vert +\left(\frac{3}{2}\right)^2$ (Quadratische Ergänzung)	$\Leftrightarrow x^2 + px = -q \quad \vert +\left(\frac{p}{2}\right)^2$ (Quadratische Ergänzung)
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$
$\Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} - 2 \quad \vert \pm\sqrt{}$	$\Leftrightarrow (x + \frac{p}{2})^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \vert \pm\sqrt{}$
$\Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4} - 2} \quad \vert -\frac{3}{2}$	$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \vert -\frac{p}{2}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$	$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \vee \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = -2$	
$\mathbb{L} = \{-1; -2\}$	$\mathbb{L} = \{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ ; -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \}$

Die "p-q-Formel"

$$\mathbf{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Auf der nächsten Seite werden mit dieser Formel an konkreten Beispielen einige Gleichungen gelöst.

Lösung einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

mit der pq-Formel: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Aufgabe:

Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung: $-\frac{3}{4}x^2 + x = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$

Die Lösung erfolgt in 5 Schritten:

1. *Zusammenfassen* $\quad -\frac{3}{4}x^2 + x = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \quad | + \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$

   Gleichung so umformen, daß rechts 0 steht:

2. *Normieren* $\quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot (-\frac{4}{3})$ Kehrwert!

   Gleichung so multiplizieren, daß
   der Faktor vor x^2 gleich 1 ist $\quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$

3. *Die pq-Formel anwenden* $\quad \Leftrightarrow \quad x = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$

   Konkret p und q bestimmen: $p = -3 \Rightarrow -\frac{p}{2} = +\frac{3}{2} \Rightarrow (\frac{p}{2})^2 = \frac{9}{4}$ und $q = 2$
   und in die pq-Formel einsetzen. Dabei müssen die Vorzeichen beachtet werden.

4. *Die Wurzel berechnen* $\quad \Leftrightarrow \quad x = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = +\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

5. *Die Lösungsmenge angeben* $\quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 2$

   $\mathbb{L} = \{ -1; -2 \}$

Weitere Beispiele:

1) $2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad | : 2$
$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$
$\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2} ; 3\}$

2) $-x^2 + 5x + 36 = 0 \quad | \cdot (-1)$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 36 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \pm \frac{13}{2}$
$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 9$
$\mathbb{L} = \{-4 ; 9\}$

3) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - 6 = 0 \quad | \cdot \frac{4}{3}$ (Kehrwert)
$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{3}x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + 8}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{289}{36}} = \frac{1}{6} \pm \frac{17}{6}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3} \vee x = 3$
$\mathbb{L} = \{ -\frac{8}{3}; 3\}$

4) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x - 5 = 0 \quad | \cdot (-2)$
$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = 0$
$\Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{9 - 10} \notin \mathbb{R}$
Die Diskriminante ist negativ, d.h. $\mathbb{L} = \{ \}$

5) $5x^2 + 16x - 16 = 0 \quad | : 5$
$\Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{5}x - \frac{16}{5} = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{5} \pm \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{16}{5}}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{5} \pm \frac{12}{5}$
$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = \frac{8}{5} \quad \mathbb{L} = \{-4 ; \frac{8}{5}\}$

6) $-3x^2 + 3x - 6 = 0 \quad | : (-3)$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$
$\mathbb{L} = \{-1 ; 2\}$

7) $2x^2 + \frac{4}{5}x - 54 = 0 \quad | : 2$
$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{5}x - 27 = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} + 27}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \pm \frac{26}{5}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{27}{5} \vee x = 5$
$\mathbb{L} = \{-\frac{27}{5} ; 5\}$

8) $x^2 + 9x - 10 = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} + 10}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \pm \frac{11}{2}$
$\Leftrightarrow x = -10 \vee x = 1$
$\mathbb{L} = \{-10 ; 1\}$

9) $4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad | : 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4}}$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
$\mathbb{L} = \{ \frac{3}{2} \}$

10) $-5x^2 + 5x - 5 = 0 \quad | : (-5)$
$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \notin \mathbb{R}$
Die Diskriminante ist negativ, d.h. $\mathbb{L} = \{ \}$