Wi

Mathematik - 1. Semester

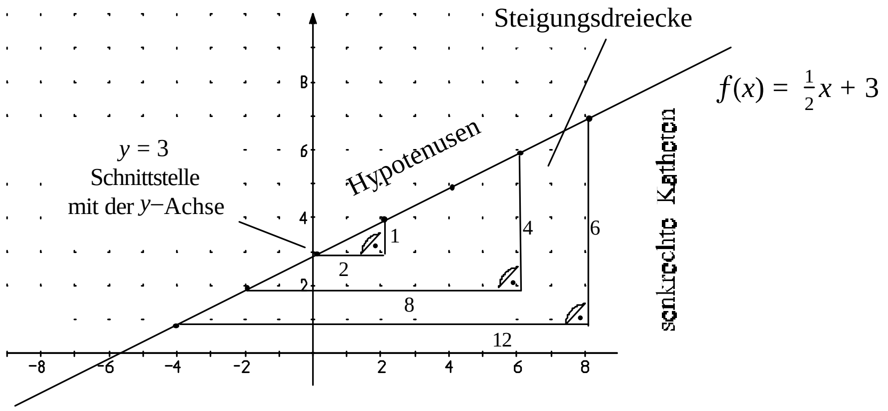
Lineare Funktionen

1. Ein Beispiel

Gegeben sei die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 3$. Anhand einer Wertetabelle sehen wir; daß die folgenden Zahlenpaare die gegebene Gleichung erfüllen:

x	-4	-2	0	2	4	6	8
y	1	2	3	4	5	6	7

Alle Zahlenpaare (x/y); welche die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 3$ erfüllen; können auch als *Zuordnungspaare* begriffen werden; denn der Wert für y hängt ja davon ab; welche Zahl für x eingesetzt wird. Bei dieser Abhängigkeit der y-Werte von den x-Werten handelt es sich also um eine *Zuordnung* oder *Funktion* f; durch die jeder reellen Zahl x eindeutig eine Zahl $y = \frac{1}{2}x + 3$ zugeordnet wird. Der Term: $\frac{1}{2}x + 3$ heißt Funktionsterm und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Es gilt also $y = f(x)$.
Wir zeichnen nun die entsprechenden Punkte P(x/y) in ein Koordinatensystem und sehen; daß alle auf einer *Geraden* liegen; die die y-Achse an der Stelle $y = 3$ schneidet. Wenn wir dann mit den Punkten aus der Tabelle rechtwinklige Dreiecke konstruieren; deren Katheten parallel zu den beiden Achsen des Koordinatensystems und deren Hypotenusen auf der Geraden liegen; so erhalten wir die folgende Darstellung:



waagerechte Katheten

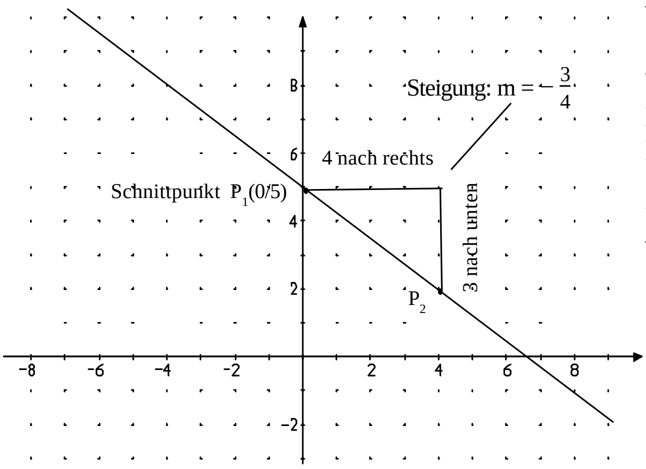
Wir sehen; daß bei allen Dreiecken das *Verhältnis* zwischen der senkrechten und der waagerechten Kathete; also der Quotient $m = \frac{\text{senkrechte Kathete}}{\text{waagerechte Kathete}} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$ gleich ist. Wir nennen diese Dreiecke *Steigungsdreiecke* der Geraden. Das Verhältnis $m = \frac{1}{2}$ aller Steigungsdreiecke heißt *Steigung* der Geraden. Hinsichtlich der graphischen Darstellung der Funktionsgleichung $f(x) = y$ erhalten wiralso:

$$y = f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{Steigung}}\cdot x + \underbrace{3}_{\text{Schnittstelle mit der } y\text{-Achse}}$$

2. Das Zeichenverfahren:

Wie kann man nun leicht den Graphen einer solchen Funktion zeichnen? Wie betrachten als Beispiel die Funktion: $f(x) = -\frac{3}{4}x + 5$. Siehe dazu die folgende Skizze und die Schritte des Zeichenverfahrens:

$f(x) = -\frac{3}{4}x + 5$



Wir beginnen bei dem Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Es ist: $P_1(0/5)$. Von dort aus gehen wir dann 4 (Nenner) Einheiten nach rechts und drei (Zähler) Einheiten nach *unten* (wegen des "–" Zeichens). Dort erhalten wir dann mit $P_2(4/2)$ einen zweiten Punkt der Geraden. Wir verbinden P_1 und P_2 und können dadurch die gesuchte Gerade zeichnen.

Merke:
Nenner nach rechts;
Zähler nach oben (+) oder unten (−).

Übungen:

Zeichnen Sie die Geraden zu den folgenden Funktionstermen:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ b) $f(x) = 3x - \frac{9}{2}$ c) $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{2}$

d) $f(x) = \frac{4}{7}x$ e) $f(x) = -x$ f) $f(x) = -2$

3. Allgemeine Definition der linearen Funktion

Wir betrachten nun die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ und zwei beliebige Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ auf der entsprechenden Geraden. Dann läßt sich die *senkrechte* Kathete des Steigungsdreiecks stets durch die Differenz der y-Werte: $y_2 - y_1$ und die *waagerechte* Kathete durch die Differenz der x-Werte: $x_2 - x_1$ berechnen; so daß für die Steigung m dann gilt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(\frac{1}{2}x_2 + 3) - (\frac{1}{2}x_1 + 3)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x_2 + 3 - \frac{1}{2}x_1 - 3}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}.$$

Allgemein gilt; daß der Graph jeder Funktion der Form: $f(x) = m{\cdot}x + b$ eine *Gerade* darstellt; die die Steigung m hat und die y–Achse an der Stelle b schneidet. Eine solche Funktion heißt *lineare* Funktion und die Gleichung $f(x) = m{\cdot}x + b$ heißt *Normalform* der Geradengleichung. Wir können diese Form einmal zusammenfassen:

Definition und Satz (*lineare Funktion*)

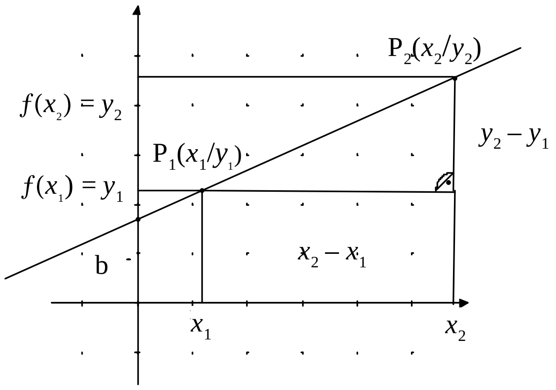
Eine Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = m \cdot x + b$ heißt **lineare Funktion.**
Ihr Graph $\mathbb{G}_f$ ist eine Gerade; die die Steigung m hat und die y–Achse bei an der Stelle $y = b$ schneidet. Für zwei *beliebige* Punkte auf der Geraden $P_1(x_1/f(x_1))$ und $P_2(x_2/f(x_2))$; wobei $x_1 \neq x_2$ ist; gilt dann:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Die Steigung m ist ein Quotient zweier Differenzen und heißt daher **Differenzenquotient.**

Wir wollen diesen Zusammenhang in Form einer Zeichnung zusammenfassend darstellen:

$$f(x) = m \cdot x + b$$



Formel für die Steigung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(Differenzenquotient)

Formel für den *y*-Abschnitt b:

$$b = y_1 - m\,x_1$$

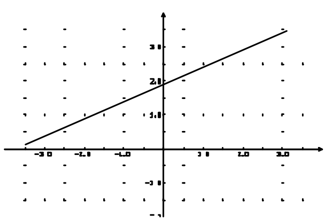
(Folgt aus $y_1 = m \cdot x_1 + b$)

Bemerkung:

Bezüglich der Steigung m betrachten wir nun anhand von drei Beispielen die Fälle:

1. $m > 0$

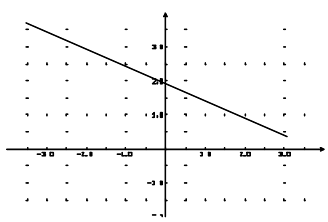
$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 2$



steigende Gerade

2. $m < 0$

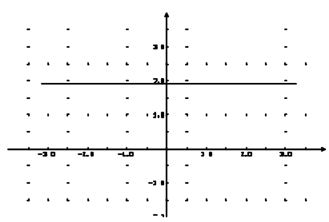
$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 2$



fallende Gerade

3. $m = 0$

$f(x) = 2$ $(= 0 \cdot x + 2)$



waagerechte Gerade

Definition (*steigend; fallend; waagerecht*)

Bei der linearen Funktion $f(x) = m \cdot x + b$ erhalten wir graphisch für

$m > 0$;	$m < 0$;	$m = 0$	eine
steigende;	*fallende;*	*waagerechte*	Gerade.

Beispiel:

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P_1(-2/-3)$ und $P_2(4/5)$?

Lösung:

1. Steigung: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-3)}{4-(-2)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
2. y-Abschnitt: $b = y_1 - m\,x_1 = -3 - \frac{4}{3}\cdot(-2) = -3 + \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$

Also lautet die Gleichung der Geraden: $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$.

Übungen:

1. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Geraden; die durch die folgenden Punkte gehen:

   a) $P_1(-2/-2)$ und $P_2(1/4)$

   b) $P_1(-3/-\frac{5}{2})$ und $P_2(2/-\frac{1}{2})$

   c) $P_1(\frac{10}{3}/-\frac{4}{3})$ und $P_2(0/5)$

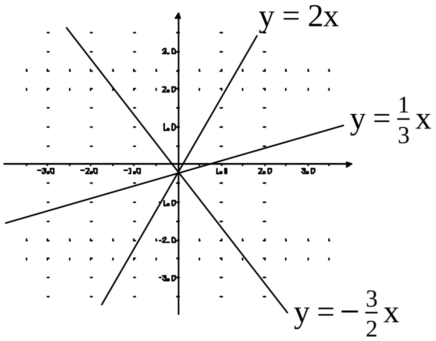
   d) $P_1(-\frac{7}{2}/3)$ und $P_2(2/-\frac{9}{2})$

   Berechnen Sie von allen vier Geraden die Schnittstelle mit der x–Achse.

2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden; die die x–Achse bei $x = \frac{5}{2}$ und die y–Achse bei $y = \frac{5}{4}$ schneidet. Überprüfen Sie rechnerisch; ob die Punkte $P_1(2/\frac{1}{4})$ und $P_2(-\frac{1}{2}/\frac{7}{4})$ auf der Geraden liegen.

4. Direkte Proportionalität

Wir betrachten nun den Fall; daß der y–Achsenabschnitt b = 0 ist. Dann haben wir lineare Funktionen der Form: $f(x) = m\cdot x$. Dazu zeichnen wir einige Beispiele:



Wir sehen; daß alle Geraden; die der Gleichung $f(x) = m\cdot x$ gehorchen; durch den Koordinatenursprung O(0/0) gehen. Außerdem wird an der Gleichung $f(x) = y = m\cdot x$ deutlich; daß das *Verhältnis* $\frac{y}{x}$ immer gleich m; also *konstant* ist. Wenn bei einer Funktion $y = f(x)$ das Verhältnis $\frac{y}{x}$ konstant ist; so sprechen wir von einer Proportionalität und sagen; daß y zu x *prortional* ist. Wir schreiben dann: y ~ x. Wir können also definieren:

Definition (*direkte Proportionalität*)

Eine lineare Funktion der Form $f(x) = y = mx$ (mit $m \neq 0$)

heißt **direkte Proportionalität.** Die Konstante $m = \frac{y}{x}$ heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Wir sagen dann: x und y sind zueinander direkt proportional und schreiben: y ~ x.

Eine Wertetabelle der linearen Funktion $f(x)$ = y = $m \cdot x$ allgemeine hat die folgende Form:

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y	$-2\,m$	$-1\,m$	0	$1\,m$	$2\,m$	$3\,m$	$4\,m$	$5\,m$	$6\,m$

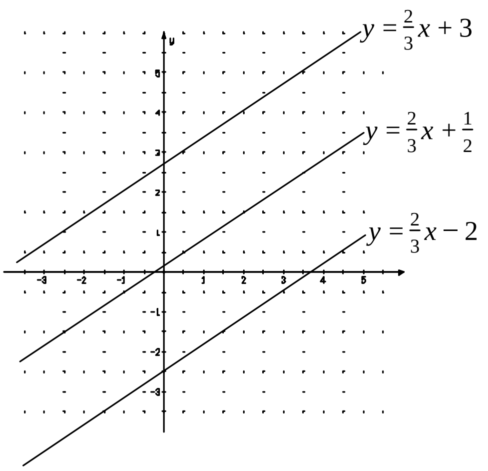
Anhand der Tabelle sehen wir; daß bei einer Proportionalität folgende Beziehung gilt:

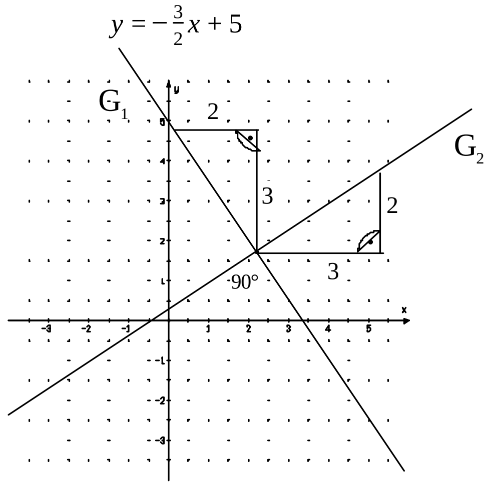
Wenn der x-Wert verdoppelt; verdreifacht; vervierfacht usw. wird; so verdoppelt; verdreifacht; vervierfacht usw. sich auch der y-Wert.

5. Parallelität und Orthogonalität:

Aufgrund der Normalform der Geradengleichung $y = m \cdot x + b$ ist es klar; daß Geraden genau dann parallel zueinander liegen; wenn sie dieselbe Steigung m haben. Siehe dazu die Zeichnung unten links.

Aber wann stehen zwei Geraden senkrecht; also im Winkel von 90° zueinander? Wir betrachten dazu einmal eine Gerade G_1 mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + 5$ und fragen; welche Steigung den die Gerade G_2 hat; die im Punkt P(2/2) senkrecht zu G_1 steht. Siehe dazu die rechte Zeichnung:





Wir stellen anhand der rechten Zeichnung fest; daß bei der Orthogonalität im Punkt P(2/2) das Steigungsdreieck der Geraden G_1 um 90° gedreht wird; sodaß die beiden Katheten ihre Rollen vertauschen und die Steigung zugleich ihr Vorzeichen wechselt. Infolgedessen geht die Steigung von G_1: $m_1 = -\frac{3}{2}$ in die Steigung $m_2 = +\frac{2}{3}$ von G_2 über. Die Steigung m_2 der senkrechten Geraden G_2 ist "der reziproke Wert der vorgegebenen Steigung m_1 mit umgekehrtem Vorzeichen". Wir fassen zusammen:

Satz (*Parallelität und Orthogonalität*)

Seien zwei Geraden G_1 und G_2 mit den Steigungen m_1 und m_2 gegeben. Es gilt dann:
a) Sie sind genau dann parallel; wenn die **Parallelitätsbedingung** $\mathbf{m_1 = m_2}$ gilt.
b) Sie stehen genau dann senkrecht zueinander;
wenn die **Orthogonalitätsbedingung:** $\mathbf{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$ gilt.

Beispiel:

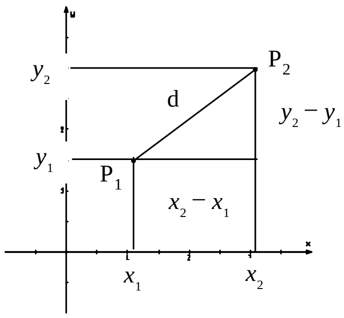
Wie lautet die Gleichung derjenigen Geraden G_2; die im Punkt P(2/1) senkrecht zur Geraden G_1 mit der Gleichung $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$ steht?

Lösung:

Da $m_1 = \frac{5}{2}$ ist; so gilt gemäß der Orthogonalitäsbedingung: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{2}{5}$.
Aus der Gleichung $y = -\frac{2}{5}x + b$ folgt mit dem Punkt P(2/1) dann: $1 = -\frac{2}{5}\cdot 2 + b$; woraus $b = \frac{9}{5}$ folgt; sodaß die gesuchte Orthogonale die Gleichung: $g(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$ hat.

6. Der Abstand zweier Punkte

Mit dem Satz des Pythagoras kann man den Abstand zweier Punkte $P_1(x_1/y_1)$ und $P_1(x_2/y_2)$ berechnen. Die nebenstehende Skizze zeigt; daß nach Pythagoras die Beziehung:
$d^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$ gilt. Daraus folgt die Formel für den Abstand:



$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Übungen:

1. Gegeben ist der Funktionsterm $f_1(x) = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$ einer Geraden G_1. Gesucht ist diejenige Gerade G_2; die an der Stelle $x = 1$ zu G_1 senkrecht steht? Zeichnen Sie beide Geraden in ein Koordinatensystem.
2. Gegeben seien zwei Geraden G_1 und G_2 mit den beiden Gleichungen $f_1(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{2}$ und $f_2(x) = \frac{7}{4}x + \frac{9}{4}$. Berechnen Sie den Schnittpunkt S zwischen den beiden Geraden.
3. Gegeben sei eine Gerade G mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ und ein Punkt P(1/3). Berechnen Sie die kürzeste Entfernung zwischen dem Punkt P und der Geraden G.
4. Gegeben seien zwei parallele Geraden mit den beiden Gleichungen $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ und $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$. Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen den beiden Geraden.
5. Ein Blumenhändler verkauft Topfpflanzen. Um den Markt zu testen; verlangt er am 1. Tag 32 DM pro Pflanze und findet dafür 8 Käufer. Am 2. Tag verlangt er 4 DM und findet dafür 43 Käufer. Wieviel Käufer sind bei einem Preis von 20 DM zu erwarten; wenn man voraussetzt; daß das Verhältnis von Preis und Nachfrage linear ist.