Der Begriff der Funktion

Galileo Galilei (1564 − 1642) hat im Jahr 1600 am schiefen Turm von Pisa, der etwa 54 m hoch ist, die Gesetze des freien Falls studiert. Er hat aus unterschiedlichen Höhen Gegenstände herunter geworfen und dabei die Zeit ihres Fallens gemessen. Dabei machte er die folgende Entdeckung: alle Körper fallen gleich schnell, ganz unabhängig von ihrer Form und ihrem Gewicht (wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt). Und zwar gibt es für alle Körper ein und dieselbe Abhängigkeit zwischen ihrer Fallzeit und ihrer Fallhöhe. Dies bedeutet, dass zu einer beliebig vorgegebenen Zeit, etwa 3 Sekunden, es eindeutig eine spezielle Höhe gibt, aus der ein Körper bis zum Aufprall genau 3 Sekunden braucht.

Wenn wir dieses Experiment von Galilei heute in Paris am Eiffelturm mit genauen Messinstrumenten durchführen würden, so erhielten wir die folgenden Ergebnisse:

Fallzeit in Sekunden	Fallhöhe in Metern
1	4,9
2	19,6
3	44,1
4	78,4
5	122,5
6	176,4
7	?

Wie geht die Tabelle nun weiter? Können wir die nächsten Werte *berechnen*, ohne weitere Messungen durchführen zu müssen? Wie groß wäre dann die Fallhöhe bei 7 Sekunden Fallzeit? Die Frage ist also, ob wir anhand der Tabelle das zugrundeliegende physikalische Fallgesetz durch eine mathematische Formel so beschreiben können, dass wir für die weiteren Fallzeiten die entsprechenden Fallhöhen *berechnen* können.

Dazu untersuchen wir einmal, wie sich alle Fallhöhen zu der ersten, zu 4,90 m, verhalten. Wir dividieren also sämtliche Fallhöhen durch 4,90 und erhalten dann ein verblüffendes Resultat:

19,6 : 4,9 = 4   44,1 : 4,9 = 9   78,4 : 4,9 = 16   122,5 : 4,9 = 25   176, 4 : 4, 9 = 36

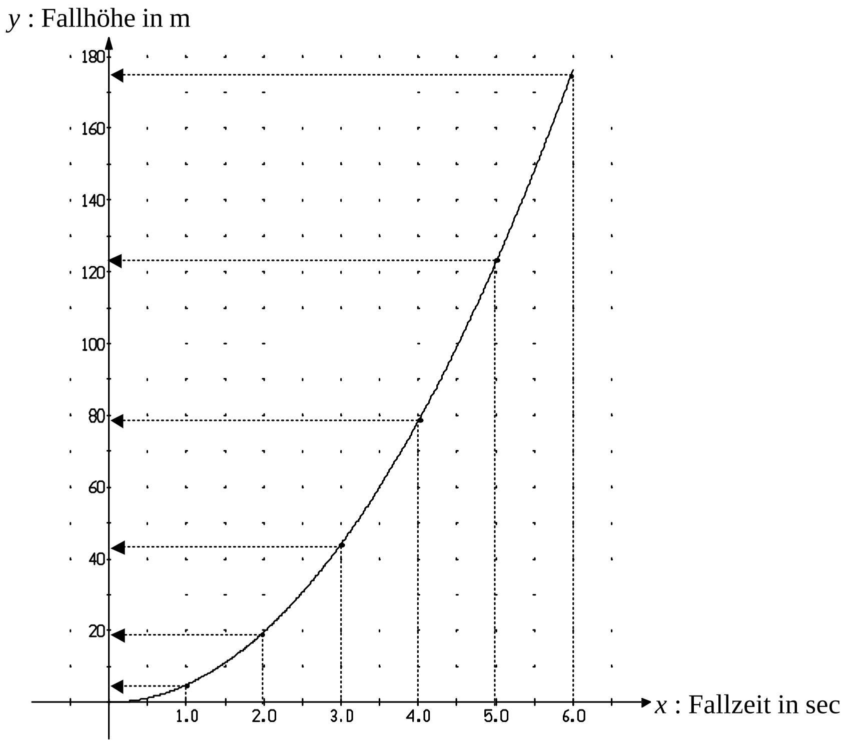
Also kann man die Fallhöhe dadurch berechnen, dass man das Quadrat der Fallzeit, also x^2 mit 4,9 multipliziert.

So ergibt sich bei der Fallzeit von 3 Sekunden eine Fallhöhe von $3^2 \cdot 4{,}9$ m = 44,1 m. Wir haben damit die gesuchte Formel gefunden. Wenn wir für die Fallzeit die Variable x verwenden und für die Fallhöhe y, so ergibt sich:

$$y = 4{,}9 \cdot x^2$$

Wir können diese Beziehung zwischen x und y nun in einem Koordinatensystem graphisch als Menge aller Punkte P(x; y) darstellen, deren Koordinaten x und y die Gleichung $y = 4{,}9 \cdot x^2$ erfüllen:

Graphische Darstellung von $y = 4{,}9 \cdot x^2$



Wir sehen, dass zu jeder Fallzeit x eindeutig eine Fallhöhe y gehört oder zugeordnet ist, die wir vermöge der Formel: $y = 4{,}9.x^2$ für jede Fallzeit x genau berechnen können.
Eine solche *Abhängigkeit* oder *Zuordnung* zwischen zwei Größen, hier zwischen der Fallzeit x und der Fallhöhe y, hat in der Mathematik einen besonderen Namen: es ist eine ***Funktion.***

Man nennt nun die Gleichung, die der Funktion zugrundeliegt - also in unserem Beispiel die Gleichung: $y = 4{,}9 \cdot x^2$ - die ***Funktionsgleichung***. Durch diese Funktionsgleichung ist die Zuordnung zwischen den Werten der Variablen x und den Werten der Variablen y genau bestimmt.

Man kann für die Variable x (die Fallzeit) eine beliebige Zahl aus der Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_0^+$ einsetzen (negative Zeiten gibt es nicht) und als Ergebnis erhält man dann den Werte für die Variable y (Fallhöhe). Das ist wieder ein Element aus der Menge $\mathbb{R}_0^+$.
Demnach ist durch die Funktionsgleichung: $y = 4{,}9 \cdot x^2$ jedem Element $x \in \mathbb{R}_0^+$ eindeutig ein Element $y \in \mathbb{R}_0^+$ zugeordnet. Und in diesem Begriff der *Zuordnung* liegt auch das Wesen des Funktionsbegriffs. Wir können also allgemein definieren:

Definition:
Eine ***Funktion*** f ist eine ***Zuordnung,*** durch die jedem Element x einer vorgegebenen Menge, der sogenannten Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$, *eindeutig* ein Element y einer anderen Menge, der sogenannten Wertemenge $\mathbb{W}_f$, zugeordnet wird.

Dieser Sachverhalt wird dann in der Mathematik durch einen Zuordnungspfeil symbolisiert. Anhand unseres Beispiels vom freien Fall wird die Funktion dann in der folgenden Weise dargestellt:

Funktionsname: f Funktionsvariable: x Funktionsgleichung: $y = f(x)$ Funktionsterm: $f(x)$

$$f : x \longmapsto y = 4{,}9\cdot x^2 \ , \quad x \in \mathbb{R}_0^+ \ , \quad y \in \mathbb{R}_0^+$$

Zuordnungspfeil: $\mapsto$ Definitionsmenge: $\mathbb{D}$ Wertemenge: $\mathbb{W}_f$

Nun ist diese Darstellung im praktischen Umgang mit Funktionen sehr umständlich. Wir beschränken uns daher darauf, lediglich den Funktionsterm $f(x)$ anzugeben und Überlegungen zur Definitions- und Wertemenge für spätere Untersuchungen zurückzustellen. Wir können dann in unserem Beispiel einfach und kurz in der folgenden Weise reden:

$$f(x) = 4{,}9\cdot x^2$$

(Gelesen: " f von x ist gleich 4,9 mal x^2 ")

Man kann nun bei jeder Funktion mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$ eindeutige Zahlenpaare $(x \,/\, y)$ bestimmen, die der diese Funktionsgleichung erfüllen. Dies geschieht durch eine sogenannte **Wertetabelle**, in der wir für beliebig ausgewählte Werte x die dazu entsprechenden Funktionswerte y berechnen. In unserem Beispiel erhalten wir dann:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	*x*-Werte
y	0	1,225	4,9	11,02	19,6	30,62	44,1	60,02	78,4	*y*-Werte

Wir können bei konkreten Werten die in der Mathematik übliche Schreib- und Sprechweise verwenden, z.B.:

$$f(1{,}5) = 11{,}02$$

(Gelesen: f von 1,5 ist gleich 11,02)

(Bedeutung: die Funktion f hat an der ***Stelle*** 1,5 den ***Funktionswert*** 11,02)

Mit dieser Wertetabelle kann dann der **Graph** der Funktion in ein Koordinatensystem gezeichnet werden. Wir können also definieren:

Definition:

Der **Graph** $\mathbb{G}_f$ einer Funktion f ist die Menge aller Punkte P$(x \,/\, y)$ im Koordinatensystem, deren Koordinaten x und y die Funktionsgleichung $y = f(x)$ erfüllen:

$$\mathbb{G}_f \;=\; \{P(x \,/\, y) \mid y = f(x)\}$$