Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 3 Variablen

Wi

Lösungsverfahren:

1. Schritt:
Zunächst muß man entscheiden, welche der drei Variablen zuerst eliminiert werden soll. Wir wählen z, weil dort die Koeffizienten am kleinsten sind.

2. Schritt:
Die Gleichung I (als einfachste) wird übernommen. Mit ihr wird dann durch geeignetes Multiplizieren und anschließendes Addieren zu den beiden anderen Gleichungen (II und III) die Variable z eliminiert:

3·I + (−2)·II = II' und 5·I + (-2)·III = III'. Wir erhalten also zwei neue Gleichungen: II' und III' mit *zwei* Variablen (hier: x und y).

3. Schritt:
Nun muß man bei den Gleichungen II' und III' entscheiden, welche der beiden Variablen als nächste eliminiert werden soll. Wir wählen y. Die Gleichung II' (als einfachste) wird übernommen. Durch geeignetes Multiplizieren und Addieren mit der Gleichung III' wird y eliminiert: (−25)·II' + III' = III''. Wir erhalten die Gleichung III'', die nur noch *eine* einzige Variable: x enthält, die dann leicht bestimmt werden kann. Wir übernehmen nun zu der Gleichung I noch die Gleichung II' und die Lösungsgleichung III'' für x.

4. Schritt:
Wir setzen die Lösung für x in die Gleichung II' ein und können so die Lösung von y bestimmen. Das ist die Gleichung II''. Wir übernehmen dazu noch die Gleichungen I und III'' (Lösungsgleichung für x).

5. Schritt:
Wir setzen nun die beiden Lösungen für x (III'') und für y (II'') in die Gleichung I ein und können dann mit der Gleichung I' auch die Lösung für z bestimmen:

Hauptrechnung

$$
\begin{array}{cc|l}
 & 5x - 3y - 2z = 7 & \text{I} \\
\wedge & 3x - 4y - 3z = 1 & \text{II} \\
\wedge & 6x + 5y - 5z = -8 & \text{III} \\
\hline
 & 5x - 3y - 2z = 7 & \text{I} \\
\Leftrightarrow\ \wedge & 9x - y = 19 & \text{II'} \\
\wedge & 13x - 25y = 51 & \text{III'} \\
\hline
 & 5x - 3y - 2z = 7 & \text{I} \\
\Leftrightarrow\ \wedge & 9x - y = 19 & \text{II'} \\
\wedge & x = 2 & \text{III'' in II'} \\
\hline
 & 5x - 3y - 2z = 7 & \text{I} \\
\Leftrightarrow\ \wedge & y = -1 & \text{II'' in I} \\
\wedge & x = 2 & \text{III'' in I} \\
\hline
 & z = 3 & \text{I'} \\
\Leftrightarrow\ \wedge & y = -1 & \text{II''} \\
\wedge & x = 2 & \text{III''}
\end{array}
$$

Nebenrechnungen

$$
\begin{array}{rcl|r}
15x - 9y - 6z & = & 21 & 3\cdot\text{I} \\
-6x + 8y + 6z & = & -2 & (-2)\cdot\text{II} \\
\hline
9x - y & = & 19 & \text{II'}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl|r}
25x - 15y - 10z & = & 35 & 5\cdot\text{I} \\
-12x - 10y + 10z & = & 16 & (-2)\cdot\text{III} \\
\hline
13x - 25y & = & 51 & \text{III'}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl|r}
-225x + 25y & = & -475 & (-25)\cdot\text{II'} \\
13x - 25y & = & 51 & 1\cdot\text{III'} \\
\hline
-212x & = & -424 & :(-212) \\
\Leftrightarrow\ x & = & 2 & \text{III''}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl|r}
9\cdot 2 - y & = & 19 & -18\ |\cdot(-1) \\
\Leftrightarrow\ y & = & -1 & \text{II''}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
5\cdot 2 - 3\cdot(-1) - 2\cdot z & = & 7 & \\
\Leftrightarrow\ 13 - 2z & = & 7 & -13\ |:(-2) \\
\Leftrightarrow\ z & = & 3 & \text{I'}
\end{array}
$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(2 / -1 / 3)\}$

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen

Aufgaben und Lösungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit drei Variablen:

1.
$$\begin{aligned} -x - 2y + 4z &= 6 \\ \wedge\ 2x + y + 3z &= 5 \\ \wedge\ 3x + 3y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ \wedge\ 2x - y &= 2 \\ \wedge\ -x + y + 2z &= -2 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} -x + y + z &= 8 \\ \wedge\ 3x + 4y &= 0 \\ \wedge\ y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= 9 \\ \wedge\ x + 5y + 3z &= 16 \\ \wedge\ 2x + 6y + z &= 19 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ \wedge\ 2y + z &= 1 \\ \wedge\ 3x - y + 2z &= -2 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} -4x + 12y - 8z &= -8 \\ \wedge\ x - 3y + 2z &= 3 \\ \wedge\ 5x - 15y + 10z &= 10 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} 5x - 2y + 10z &= 25 \\ \wedge\ 8x + y - 6z &= -15 \\ \wedge\ 2x - 5y + 26z &= 65 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= -14 \\ \wedge\ -2x + y + 3z &= 4 \\ \wedge\ -2x - 8y + 10z &= -34 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 11 \\ \wedge\ x + y - 2z &= -7 \\ \wedge\ 3x - 4y - 7z &= 27 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 50 \\ \wedge\ 3x - 7y + z &= 10 \\ \wedge\ 13x + 4y - 3z &= -30 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} -3x - 3y + 5z &= 0 \\ \wedge\ 3x + 5y - 2z &= 0 \\ \wedge\ 5x - 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} 2x + 4y - 11z &= 6 \\ \wedge\ 9x - 7y + 5z &= 2 \\ \wedge\ 12x - 26y + 43z &= 0 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ \wedge\ 2y + z &= 1 \\ \wedge\ 3x - y + 2z &= -2 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ \wedge\ y - z &= 0 \\ \wedge\ -x + z &= 0 \end{aligned}$$

15.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} & x & - & y & + & z & = & 0 \\ \wedge & & & 2y & + & z & = & 1 \\ \wedge & 3x & - & y & + & 2z & = & -2 \end{array}$$

16.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} & x & - & y & & & = & 0 \\ \wedge & & & y & - & z & = & 0 \\ \wedge & -x & & & + & z & = & 0 \end{array}$$

19.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} & \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & 2 \\ \wedge & \frac{2}{x} & - & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & -1 \\ \wedge & \frac{1}{x} & + & \frac{2}{y} & - & \frac{1}{z} & = & 6 \end{array}$$

20.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} & \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & + & \frac{1}{z} & = & 1 \\ \wedge & \frac{1}{x} & - & \frac{1}{y} & - & \frac{2}{z} & = & 7 \\ \wedge & \frac{2}{x} & + & \frac{1}{y} & - & \frac{1}{z} & = & 15 \end{array}$$

Lösungen:

1. $\mathbb{L} = \{2;-2;1\}$ 2. $\mathbb{L} = \{0; -2; 0\}$ 3. $\mathbb{L} = \{-4,3,1\}$ 4. $\mathbb{L} = \{3, 2, 1\}$ 5. $\mathbb{L} = \{\frac{1}{8}; \frac{7}{8}; -\frac{3}{4}\}$

6. $\mathbb{L} = \{\}$ 7. $\mathbb{L} = \{(x; y; z) \mid z \in \mathbb{Q} \wedge x = \frac{2z+5}{21} \wedge y = \frac{-210z+525}{42}\}$ 8. $\mathbb{L} = \{2; 5;1\}$

9. $\mathbb{L} = \{(2;-7;1)\}$ 10. $\mathbb{L} = \{(0; 0; 10)\}$ 11. $\mathbb{L} = \{(x; y; z) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y = -4x + 5 \wedge z = x\}$

12. $\mathbb{L} = \{\}$ 13. $\mathbb{L} = \{(0; 0; 0)\}$ 14. $\mathbb{L} = \{(x; y; z) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y = x \wedge z = x\}$

19. $\mathbb{L} = \{1; \frac{1}{2}; -1\}$ 20. $\mathbb{L} = \{\frac{3}{2}; \frac{1}{7}; -\frac{3}{20}\}$