Regeln für uneigentliche Grenzwerte

I. Allgemein

Im Folgenden werden Grenzwertregeln aufgeführt, die für *alle* fünf Grenzwertfälle:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (4) $\text{l-}\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (5) $\text{r-}\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

in gleicher Weise gelten. Wir schreiben nun einheitlich für alle Fälle kurz: **lim *f*(*x*)**.

1. Regel:

a) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in \mathbb{R}$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$ — Kurzform:

Behauptung: $\lim [\, g(x) + h(x) \,] = \pm\infty$

$c + (+\infty) = +\infty$
$c + (-\infty) = -\infty$

b) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = \pm\infty$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$ — Kurzform:

Behauptung: $\lim [\, g(x) + h(x) \,] = \pm\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Ausnahmen: Die Beziehung: $(+\infty) + (-\infty)$ ist nicht definiert.

Lösungsmöglichkeiten:
Durch Termumformungen, Ausklammern usw. auf bekannte Regeln (z.B. auch de l'Hospital) zurückführen.

2. Regel:

a) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$ — Kurzform:

Behauptung: $\lim [\, g(x) \cdot h(x) \,] = \pm\infty$

$c \cdot (+\infty) = +\infty$ für $c > 0$
$c \cdot (-\infty) = -\infty$ für $c > 0$
$c \cdot (+\infty) = -\infty$ für $c < 0$
$c \cdot (-\infty) = +\infty$ für $c < 0$

b) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = \pm\infty$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$ — Kurzform:

Behauptung: $\lim [\, g(x) \cdot h(x) \,] = \pm\infty$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
$(-\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

Ausnahmen: Die folgenden Beziehungen

$0 \cdot (+\infty)$ und $0 \cdot (-\infty)$ sind nicht definiert.

Lösungsmöglichkeiten:
Durch Termumformungen, Ausklammern usw. auf bekannte Regeln (z.B. auch de l'Hospital) zurückführen.

3. Regel:

a) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$

Kurzform:

Behauptung: $\boxed{\lim \frac{g(x)}{h(x)} = 0}$

$\frac{c}{+\infty} = 0$ für $c \neq 0$

$\frac{c}{-\infty} = 0$ für $c \neq 0$

b) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = \pm\infty$

(2) $\lim h(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Kurzform:

Behauptung: $\boxed{\lim \frac{g(x)}{h(x)} = \pm\infty}$

$\frac{+\infty}{c} = +\infty$ für $c > 0$

$\frac{+\infty}{c} = -\infty$ für $c < 0$

$\frac{-\infty}{c} = -\infty$ für $c > 0$

$\frac{-\infty}{c} = +\infty$ für $c < 0$

Ausnahmen: Die folgenden Beziehungen

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ und $\frac{0}{0}$ sind nicht definiert.

Lösungsmöglichkeiten: die Regeln von de l'Hospital an wenden.

4. Regel:

b) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in [0, 1[$

(2) $\lim h(x) = +\infty$

Kurzform:

Behauptung: $\boxed{\lim g(x)^{h(x)} = 0}$

$c^{+\infty} = 0$ für $0 \leq c < 1$

$[c^{-\infty} = +\infty$ für $0 \leq c < 1]$

c) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in]1, \infty[$

(2) $\lim h(x) = +\infty$

Kurzform:

Behauptung: $\boxed{\lim g(x)^{h(x)} = +\infty}$

$c^{+\infty} = +\infty$ für $1 < c$

$[c^{-\infty} = +0$ für $1 < c]$

d) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = +\infty$

(2) $\lim h(x) = +\infty$

Kurzform:

Behauptung: $\boxed{\lim g(x)^{h(x)} = +\infty}$

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

$[(+\infty)^{-\infty} = 0]$

Ausnahmen: Die folgenden Beziehungen

$1^{\pm\infty}$, $(+\infty)^0$ und 0^0 sind nicht definiert.

Lösungsmöglichkeiten:

Umformen (e-Funktion!) und die Regeln von de l'Hospital anwenden.

II. **Die Grenzwertregeln von de l'Hospital**

Im Folgenden seien *f, g* und *h* Funktionen mit der Bedingung: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Regel von L'Hospital

Voraussetzungen:

(1) $g(x_0) = h(x_0) = 0$ (2) $g'(x_0)$ und $h'(x_0)$ existieren (3) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert

Behauptung:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x \cdot (-1)} = -1$$

2. Regel von L'Hospital

Voraussetzungen:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 0$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert

Behauptung:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\arctan x - \pi/2}{1/x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right) / \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

3. Regel von L'Hospital

Voraussetzungen:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \infty$ (2) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert

Behauptung:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln x} = \frac{1 \cdot x}{1} = 0$$

4. Regel von L'Hospital

Voraussetzungen:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \infty$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert

Behauptung:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$