Reiner Winter

Analysis

Aufgaben mit Musterlösungen

1. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$ mit $x \in \mathbb{R}^+$.

1.1. Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ in ein unteres Koordinatensystem:

1.2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f(x)$ und der x-Achse begrenzt wird.

1.3. Bilden Sie diejenige Stammfunktion F von f, die durch den Koordinatenursprung geht.

Welche Eigenschaften hat diese Stammfunktion F?

1.4. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von F in ein oberes Koordinatensystem über $\mathbb{G}_f$ und deuten Sie anhand der Zeichnung das Ergebnis von (1.2) geometrisch.

Lösung

Aufgabe 1

1. Aufgabe:

Gegeben: $f_a(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$, a ∈ ℝ

1. Ableitungen:

$f'(x) = x^4 - 4x^2$ $\quad f''(x) = 4x^3 - 8x$ $\quad f'''(x) = 12x^2 - 8.$

2. Symmetrie:

$f(-x) = \frac{1}{5}(-x)^5 - \frac{4}{3}(-x)^3 = -(\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3) = -f(x)$, d.h.: f ist punktsymmetrisch zu P(0, 0).

3. Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \lor \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \lor x^2 - \frac{20}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$ $\quad \mathbb{L}_f \approx \{-2{,}58 / 0 / 2{,}58\}$

4. Extrempunkte:

a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad f'(x) = x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \lor x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = \pm 2 \qquad \mathbb{L}_{f'} = \{-2, 0, 2\}$

b) Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \land f''(x) \neq 0.$

Einsetzen der Werte von $\mathbb{L}_{f'}$ in die 2. Ableitung: $f_1''(x) = 4x^3 - 8x$:

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

$f''(-2) = 4(-2)^3 - 8\cdot(-2) = -16 < 0 \Rightarrow f$ hat bei x ≈ -2 ein lok Maximum.

Wegen der Punktsymmetrie: f hat bei x ≈ +2 ein lokales Minimum.

c) Funktionswerte berechnen und Punkte angeben:

$f(-2) \approx 4{,}27 \Rightarrow \mathbb{G}_f$ hat bei T(−2, 4,27) einen lokalen Hochpunkt.

Wegen Punktsymmetrie gilt: $\mathbb{G}_f$ hat bei H(+2 / − 4,27) einen lokalen Tiefpunktpunkt.

5. Wendepunkte:

a) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad f''(x) = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor 4x^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = \pm\sqrt{2} \qquad \mathbb{L}_{f''} = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\} \approx \{-1{,}41, 0, 1{,}41\}.$

b) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0.$

Einsetzen der Werte von $\mathbb{L}_{f''}$ in die 3. Ableitung: $f_1'''(x) = 12x^2 - 8$:

$f'''(-1{,}41) = 12(-1{,}41)^2 - 8 = 16 > 0 \Rightarrow f$ hat bei x ≈ −1,412 eine RL-Wendestelle.

$f'''(0) = -8 < 0 \Rightarrow f$ hat bei x = 0 eine LR-Wendestelle

Wegen der Punktsymmetrie gilt: f hat bei x ≈ 1,41 eine RL-Wendestelle.

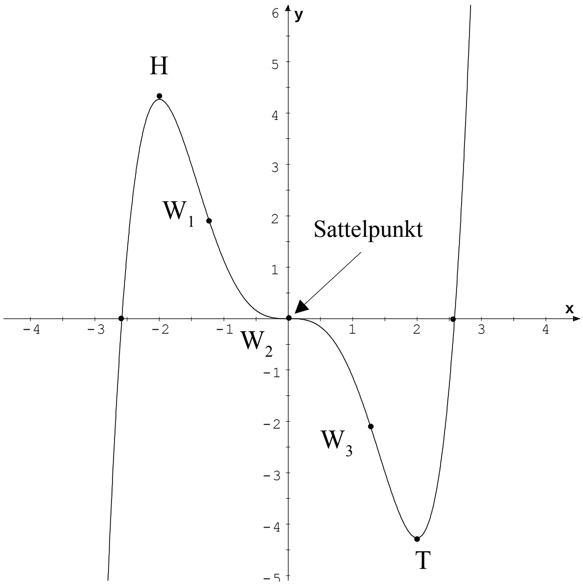
c) Funktionswerte berechnen und Punkte angeben:

$f(-1{,}41) = 2{,}63 \Rightarrow \mathbb{G}_f$ hat bei $W_1(-1{,}41,\ 4)$ einen RL-Wendepunkt.

$f(0) = 0 \Rightarrow \mathbb{G}_f$ hat bei $W_2(0{,}0)$ einen LR-Wendepunkt. Das ist wegen $f'(0) = 0$ zugleich auch ein Sattelpunkt.

Wegen Punktsymmetrie gilt: $\mathbb{G}_f$ hat bei $W_3(1{,}41,\ -2{,}63)$ einen RL-Wendepunkt.

Zeichnung



1.2. Flächenberechnung. Wegen Punktsymmetrie gilt:

$$A = 2\cdot\left|\int_0^{\sqrt{\frac{20}{3}}}\left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{4}{3}x^3\right)dx\right| = 2\cdot\left|\left[\tfrac{1}{30}x^6 - \tfrac{1}{3}x^4\right]_0^{\sqrt{\frac{20}{3}}}\right| = 2\left|\left(\tfrac{1}{30}\left(\sqrt{\tfrac{20}{3}}\right)^6 - \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{\tfrac{20}{3}}\right)^4 - 0\right)\right|$$

$$= 2\cdot\left|\frac{8000}{27\cdot 30} - \frac{400}{27}\right| = 2\cdot\left|\frac{8000}{27\cdot 30} - \frac{12000}{27\cdot 30}\right| = 2\cdot\frac{4000}{810} = \frac{800}{81}$$

1.3 Durch Integration von $f(x)$ erhalten wir: $F(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{3}x^4 + c$, mit $c \in \mathbb{R}$..

Da laut Vor. $F(0) = 0$ ist, gilt: $c = 0$. Also ist: $F(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{3}x^4$.

a) Nullstellen von F(x):

Da c = 0 ist, können die Nullstellen leicht berechnet werden:

$F_1(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{3}x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4\left(\frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{3} = 0$

$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{10} \approx$. $\mathbb{L}_{F_1} = \{-3{,}16\ ,\ 0\ ,\ 3{,}16\}$

b) Extrempunktevon $F_1(x)$:

Die Funktion $f(x)$ ist die Ableitung der Stammfunktion F(x). Da nun aus der Zeichnung von $\mathbb{G}_f$ folgt, daß $f(x) = F'(x)$ an der Stelle $x = -$ einen Vorzeichenwechsel VZW(–/+) hat, gilt: F(x) hat bei $x = -2{,}58$ ein lokales Minimum. Ebenso:

$F'(x)$ hat bei $x = 0$ einen VZW(+/–) $\Rightarrow$ F(x) hat bei $x = 0$ ein lokales Maximum.

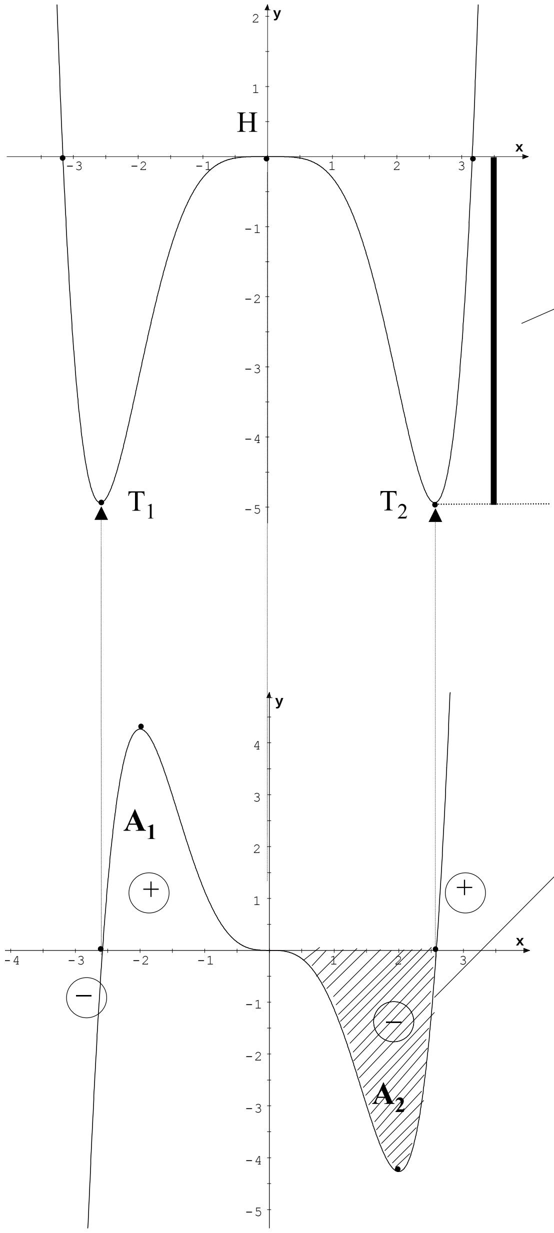
$F'(x)$ hat bei $x = 2{,}58$ einen VZW(–/+) $\Rightarrow$ F(x) hat bei $x = 2{,}58$ ein lokales Minimum.

Funktionswerte: $F_1(-2{,}58\ ) = \frac{400}{81}$, d.h. wir haben die folgenden Extrempunkte für F(x):

$T_1(-2{,}58\ ,\ -\frac{400}{81})$, H(0, 0), $T_2(2{,}58\ ,\ -\frac{400}{81})$ Siehe Zeichnung:

1.4.

a) Zeichnung von f(x) und F(x):



$$F(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{3}x^4$$

$$\begin{aligned} s &= |F(\sqrt{\tfrac{20}{3}}) - F(0)| \\ &= (\tfrac{1}{30}(\sqrt{\tfrac{20}{3}})^6 - \tfrac{1}{3}(\sqrt{\tfrac{20}{3}})) - 0 \\ &= \frac{400}{81} \end{aligned}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \left| \int_0^{\sqrt{\frac{20}{3}}} (\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{4}{3}x^3)dx \right| \\ &= \left| [\ F(x)\ ]_0^{\sqrt{\frac{20}{3}}} \right| \\ &= |\ F(\sqrt{\tfrac{20}{3}}) - F(0)\ | \\ &= |\ (\tfrac{1}{30}(\sqrt{\tfrac{20}{3}})^6 - \tfrac{1}{3}(\sqrt{\tfrac{20}{3}}) - 0\ | \\ &= \frac{400}{81} \end{aligned}$$

b) Interpretation und Erläuterung:

Der **Flächeninhalt** $\mathbf{A_2} = \left| \int_0^{\sqrt{\frac{20}{3}}} (\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3)dx \right|$ unterhalb der Funktion f(x)

entspricht der **Strecke** $\mathbf{s = F(\sqrt{\tfrac{20}{3}}) - F(0)}$ bezüglich der Stammfunktion F(x)

Der gesamte Flächen inhalt $A = A_1 + A_2$ entspricht aus Symmetriegründen dann dem doppelten Wert von A_2., also $A = 2 \cdot A_2$.

2. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktionenschar: $f_a(x) = -\frac{1}{5}x^5 + a^2 x^3$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}^+$.

2.1. Setzen Sie a = 1 und untersuchen Sie die Funktion $f_1(x)$ auf Symmetrie; Nullstellen;

Extrempunkte und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f_1(x)$ in das untere Koordinatensystem:

2.2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche; die vom Graphen von $f_1(x)$ und der x-Achse begrenzt wird.

2.3. Bilden Sie diejenige Stammfunktion F_1 von f_1; die durch den Koordinatenursprung geht.

Welche Eigenschaften hat diese Stammfunktion F_1?

2.4. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von F_1 in das obere Koordinatensystem und deuten Sie anhand der Zeichnung das folgende Integral:

$\int_0^1 f_1(x)\,dx$ geometrisch.

2.5. Bestimmen Sie die Variable $a \in \mathbb{R}^+$ so; daß die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f_a einen Flächeninhalt von $\frac{25}{6}$ FE annimmt.

Lösung
2. Aufgabe

Gegeben: $f_a(x) = -\frac{1}{5}x^5 + a^2x^3$; $a \in \mathbb{R}^+$. Für a = 1 erhalten wir: $f_1(x) = -\frac{1}{5}x^5 + x^3$.

1. Ableitungen:

$f_1'(x) = -x^4 + 3x^2$ $\quad f_1''(x) = -4x^3 + 6x$ $\quad f_1'''(x) = -12x^2 + 6$.

2. Symmetrie:

$f(-x) = -\frac{1}{5}(-x)^5 + (-x)^3 = -(-\frac{1}{5}x^5 + x^3) = -f(x)$; d.h.: f ist punktsymmetrisch zu P(0; 0).

3. Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x^5 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(-\frac{1}{5}x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \vee -\frac{1}{5}x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{5}$ $\quad \mathbb{L}_f = \{-\sqrt{5}; 0; \sqrt{5}\} \approx \{-2;24; 0; 2;24\}$

4. Extrempunkte:

a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad f_1'(x) = -x^4 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \vee -x^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$ $\quad \mathbb{L}_{f'} = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\} \approx \{-1;72; 0; 1;72\}$

b) Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$.

Einsetzen der Werte von $\mathbb{L}_{f'}$ in die 2. Ableitung: $f_1''(x) = -4x^3 + 6x$:

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

$f''(-1;72) = -4(-1;72)^3 + 6\cdot(-1;72) = 10;78 > 0 \Rightarrow f$ hat bei x ≈ 1;72 ein lok Minimum.

Wegen der Punktsymmetrie: f hat bei x ≈ 1;72 ein lokales Maximum.

c) Funktionswerte berechnen und Punkte angeben:

$f(-1;72) \approx -2;08 \Rightarrow \mathbb{G}_f$ hat bei T(−1;72; −2;08) einen lokalen Tiefpunkt.

Wegen Punktsymmetrie gilt: $\mathbb{G}_f$ hat bei H(1;72; 2;08) einen lokalen Hochpunkt.

5. Wendepunkte:

a) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad f_1''(x) = -4x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-4x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee -4x^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad \mathbb{L}_{f''} = \{-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0; \sqrt{\frac{3}{2}}\} \approx \{-1;22; 0; 1;22\}$.

b) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$.

Einsetzen der Werte von $\mathbb{L}_{f''}$ in die 3. Ableitung: $f_1'''(x) = -12x^2 + 6$:

$f'''(-1;22) = -12(-1;22)^2 + 6 = -11;86 < 0 \Rightarrow f$ hat bei x ≈ −1;22 eine LR-Wendestelle.

$f'''(0) = 6 > 0 \Rightarrow f$ hat bei x = 0 eine RL-Wendestelle

Wegen der Punktsymmetrie gilt: f hat bei x ≈ 1;22 eine LR-Wendestelle.

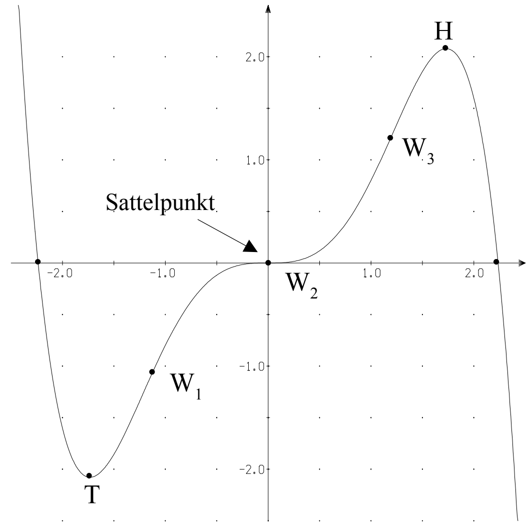
c) Funktionswerte berechnen und Punkte angeben:

$f(-1;22) = -1;28 \Rightarrow \mathbb{G}_f$ hat bei $W_1(-1;22; -1;28)$ einen LR-Wendepunkt.

$f(0) = 0 \Rightarrow \mathbb{G}_f$ hat bei $W_2(0;0)$ einen RL-Wendepunkt. Das ist wegen $f'(0) = 0$ zugleich auch ein Sattelpunkt.

Wegen Punktsymmetrie gilt: $\mathbb{G}_f$ hat bei $W_3(1;22; 1;28)$ einen LR-Wendepunkt.

Zeichnung



2.2. Flächenberechnung. Wegen Punktsymmetrie gilt:

$$A = 2\cdot\left|\int_0^{\sqrt{5}}(-\tfrac{1}{5}x^5 + x^3)dx\right| = 2\cdot\left|\left[-\tfrac{1}{30}x^6 + \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{5}}\right| = 2\left|(-\tfrac{1}{30}(\sqrt{5})^6 + \tfrac{1}{4}(\sqrt{5})^4 - 0)\right|$$

$$= 2\cdot\left|-\tfrac{125}{30} + \tfrac{25}{4}\right| = 2\cdot\left|-\tfrac{250}{60} + \tfrac{375}{60}\right| = 2\cdot\tfrac{125}{60} = \tfrac{25}{6}$$

2.3 Durch Integration von $f_1(x)$ erhalten wir: $F_1(x) = -\frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{4}x^4 + c$; mit $c \in \mathbb{R}$.

Da laut Vor. $F_1(0) = 0$ ist; gilt: $c = 0$. Also ist: $F_1(x) = -\frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{4}x^4$.

a) Nullstellen von $F_1(x)$:

Da $c = 0$ ist; können die Nullstellen leicht berechnet werden:

$F_1(x) = -\frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{4}x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4(-\frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{4} = 0$

$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{15}{2}} \approx \pm.$ $\mathbb{L}_{F_1} = \{-2;74; 0; 2;74\}$

b) Extrempunktevon $F_1(x)$:

Die Funktion $f_1(x)$ ist die Ableitung der Stammfunktion $F_1(x)$. Da nun aus der Zeichnung von (1.1) folgt; daß $f_1(x) = F'_1(x)$ an der Stelle $x = -\sqrt{5}$ einen Vorzeichenwechsel VZW(+/–) hat; gilt: $F_1(x)$ hat bei $x = -\sqrt{5}$ ein lokales Maximum. Ebenso:

$F'_1(x)$ hat bei $x = 0$ einen VZW(–/+) $\Rightarrow F_1(x)$ hat bei $x = 0$ ein lokales Minimum.

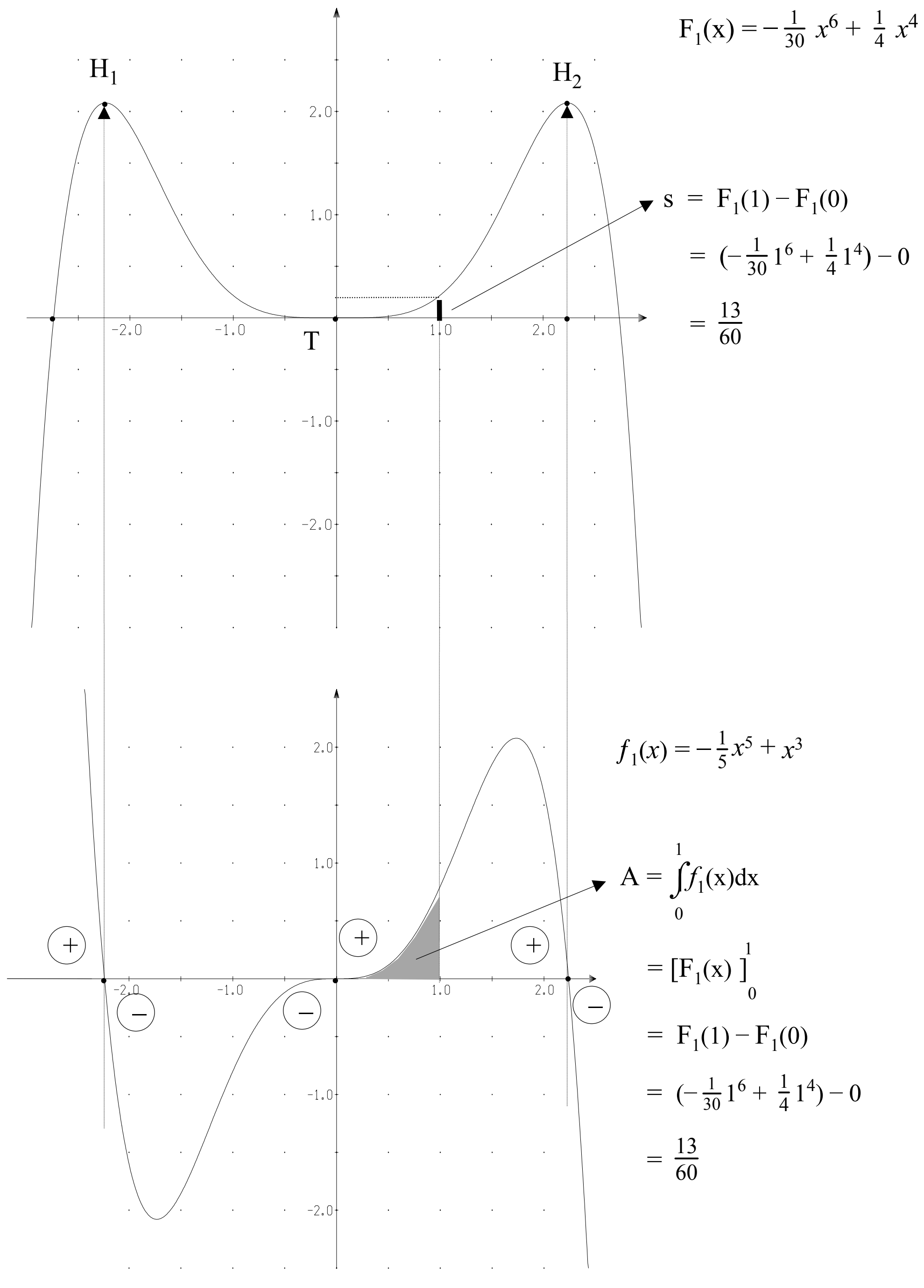
$F'_1(x)$ hat bei $x = +\sqrt{5}$ einen VZW(+/–) $\Rightarrow F_1(x)$ hat bei $x = \sqrt{5}$ ein lokales Maximum.

Funktionswerte: $F_1(\sqrt{5}) = \frac{25}{12}$; d.h. wir haben die Punkte: $H_1(-\sqrt{5}; \frac{25}{12})$; $T(0; 0)$; $H_2(\sqrt{5}; \frac{25}{12})$.

Siehe Zeichnung:

2.4.

a) Zeichnung von $f_1(x)$ und $F_1(x)$:



b) Interpretation und Erläuterung:

Der **Flächeninhalt** $\mathbf{A = \int_0^1 f_1(x)dx}$ unterhalb der Funktion $f_1(x)$

entspricht der **Strecke** $\mathbf{s = F_1(1) - F_1(0)}$ bezüglich der Stammfunktion $F_1(x)$

2.5.

Zunächst bestimmen wir allgemein für a $\in \mathbb{R}^+$ die Nullstellen von $f_a(x)$:

$$f_a(x) = -\tfrac{1}{5}x^5 + a^2 x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3\,(-\tfrac{1}{5}x^2 + a^2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = 0 \;\vee\; -\tfrac{1}{5}x^2 + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \;\vee\; x^2 - 5\,a^2 = 0 \;\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = \pm\sqrt{5}\,a \quad \mathbb{L}_f = \{-\sqrt{5}\,a;\, 0;\, \sqrt{5}\,a\}.$$

Da $f_a(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist und die Fläche zwischen x-Achse und Graph im Intervall $[0; \sqrt{5}a]$ laut (1.1) oberhalb der x-Achse liegt; gilt für die Gesamtfläche A:

$A = 2\cdot\int\limits_0^{\sqrt{5}\,a}(-\tfrac{1}{5}x^5 + a^2x^3)dx$ und laut Aufgabenstellung soll: $A = \frac{25}{6}$ sein. Also folgt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{25}{6} &= 2\cdot\Big[-\tfrac{1}{30}x^6 + a^2\,\tfrac{1}{4}x^4\Big]_0^{\sqrt{5}\,a} \\
&= 2\,\big(-\tfrac{1}{30}(\sqrt{5}\,a)^6 + a^2\cdot\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}\,a)^4 \;-\; 0\,\big) \\
&= 2\cdot\big(-\tfrac{1}{30}\cdot 125\,a^6 + a^2\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 25a^4\,\big) \\
&= 2\cdot\big(-\tfrac{250}{60}a^6 + \tfrac{375}{60}a^6\,\big) \;=\; 2\cdot\tfrac{125}{60}a^6 \\
&= \tfrac{25}{6}a^6
\end{aligned}$$

Also folgt schließlich die Gleichung:

$$\tfrac{25}{6} = \tfrac{25}{6}a^6 \;\Leftrightarrow\; 1 = a^6 \;\Leftrightarrow\; a = -1 \;\vee\; a = 1.$$

Da laut Voraussetzung aber $a \in \mathbb{R}^+$ ist; folgt als Lösung: $a = 1$.

Ergebnis:
Für $a = 1$ hat die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von f_a
einen Flächeninhalt von $\frac{25}{6}$ FE.

3. Aufgabe

Gegeben seien zwei quadratische Funktionen:

$$f(x) = -2x^2 + 8 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$$

3.1. Berechnen Sie die Nullstellen der beiden Funktionen und zeichnen Sie die beiden Parabeln in ein Koordinatensystem.

3.2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Graphen $\mathbb{G}_f$ und $\mathbb{G}_g$ begrenzt wird.

3.3. Betrachten Sie die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$ und bilden Sie dazu diejenige Stammfunktion, die durch den Koordinatenursprung geht. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in das obere Koordinatensystem.

3.4. Deuten Sie anhand der Zeichnung das Ergebnis aus Aufgabe 1.2.

3.5. Die beiden Funktionen f und g sind Spezialfälle den beiden Funktionsscharen:

$f_a(x) = -a\,x^2 + a^3$ und $g_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a$ wenn man für $a = 2$ einsetzt.

Bestimmen Sie *allgemein* für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ die beiden Scheitelpunkte und die Nullstellen der beiden parabelförmigen Funktionsscharen.

3.6. Bestimmen Sie die Variable $a \in \,]0, 1[$ so, daß die Fläche zwischen den beiden Graphen einen maximalen Inhalt annimmt.

Lösung

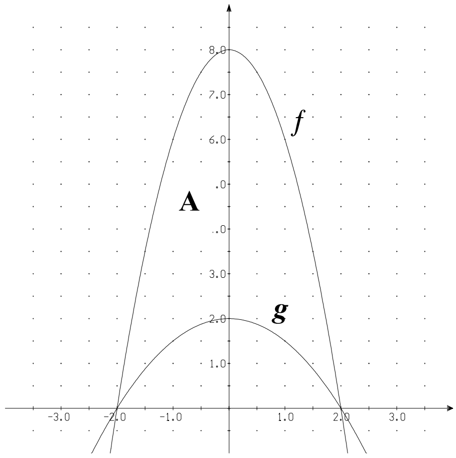
3. Aufgabe

3.1.

$f(x) = -2x^2 + 8 = 0 \mid :(-2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 2$

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0 \mid \cdot(-2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 2$

Beide Parabeln haben die gleichen Nullstellen. Der Scheitelpunkt von f liegt bei (0/8) und der von g bei (0/2). Die Zeichnung lautet demnach:



3.2.

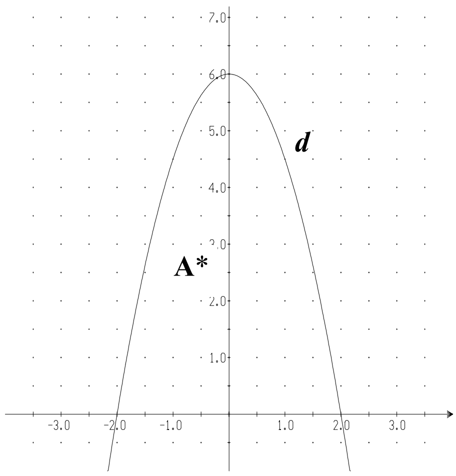
Für die Fläche A zwischen f und g gilt: A = $2\int_0^2 (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$ (wegen Symmetrie!).

Nun gilt: $f(x) - g(x) = (-2x^2 + 8) - (-\frac{1}{2}x^2 + 2) = -2x^2 + 8 + \frac{1}{2}x^2 - 2 = -\frac{3}{2}x^2 + 6$

Also A $= 2\cdot\int_0^2 (-\frac{3}{2}x^2 + 6)\mathrm{d}x = 2\cdot\left[-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 6x\right]_0^2 = 2\cdot[(-4 + 12) - 0] = 16$

3.3.

Wir bilden die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$, die wir oben bei der Flächenberechnung ja schon bestimmt haben: $d(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6$. Es ist eine quadratische Funktion:



Die Fläche **A** zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ist genau so groß wie die Fläche **A*** unterhalb der Differenzfunktion $d(x)$, denn es gilt ja: $\mathbf{A} = 2\int_0^2 (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = 2\cdot\int_0^2 d(x)\mathrm{d}x = \mathbf{A^*}$

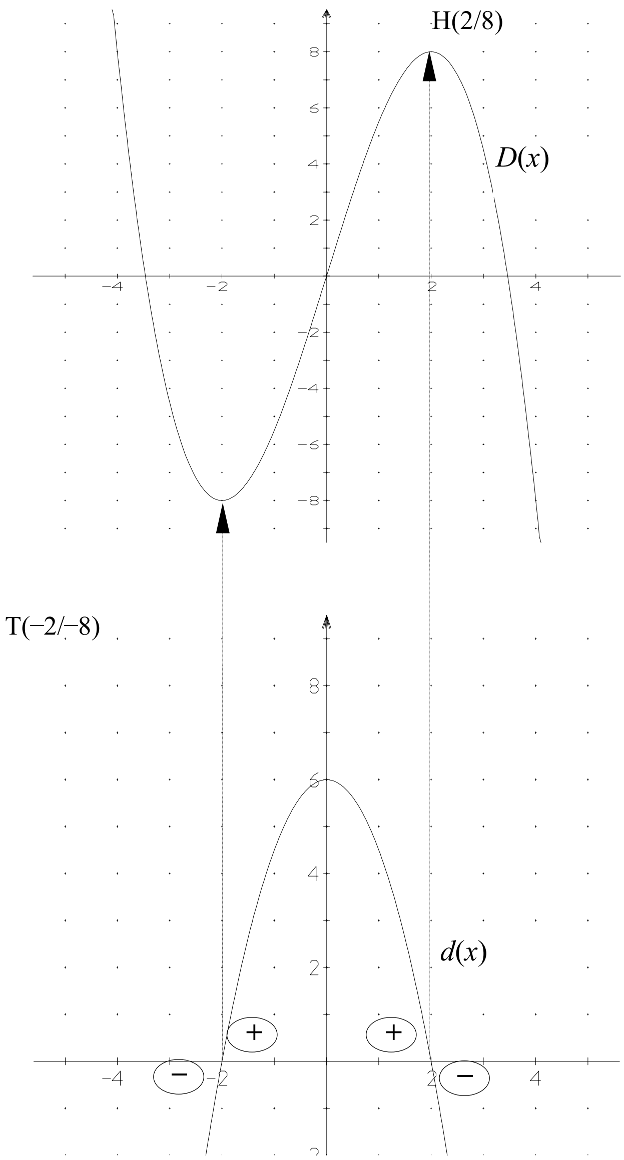
Wir bilden nun zu dieser Differenzfunktion $d(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6$ die Stammfunktion $D(x)$, das ist diejenige Funktion, deren Ableitung wieder $d(x)$ ist, d.h. es muß $D'(x) = d(x)$ gelten. Wir gewinnen die Stammfunktion durch die Integrationsformeln:

$D(x) = -\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 6x + C$. Die Konstante C ist gleich Null, weil nach Voraussetzung die Stammfunktion $D(x)$ ja durch den Koordinatenursprung gehen soll. Es gilt also: $D(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x$.

a) Wir berechnen die Nullstellen von $D(x)$:

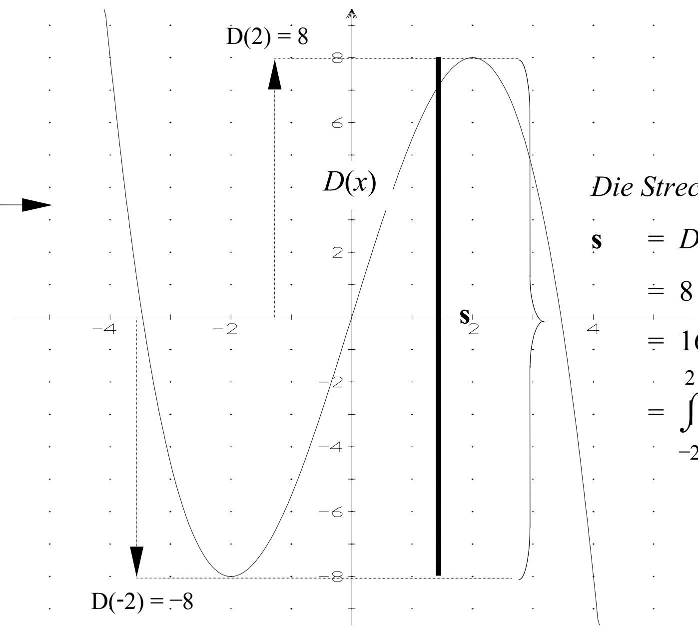
$$D(x) = 0 \quad \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}x^3 + 6x = 0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot(-\tfrac{1}{2}x^2 + 6) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee -\tfrac{1}{2}x^2 + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{12} \vee x = \sqrt{12} \qquad \mathbb{L} = \{-\sqrt{12}, 0, \sqrt{12}\}$$

b) Wir berechnen die Extrema von $D(x)$:
Da $D'(x) = d(x)$ gilt, sind die Extremstellen von $D(x)$ gleich den Stellen, die bei $d(x)$ einen Vorzeichenwechsel haben. Also gilt: $D(x)$ hat bei $x = 2$ ein lokales Maximum und bei $x = -2$ ein lokales Minimum.
Da $D(2) = -\frac{1}{2}2^3 + 6\cdot 2 = 8$ und $D(-2) = -\frac{1}{2}(-2)^3 + 6\cdot(-2) = -8$ ist, so haben wir die folgenden Extrempunkte von $D(x)$: Hochpunkt H(2/8) und Tiefpunkt T(−2/−8).



3.4.

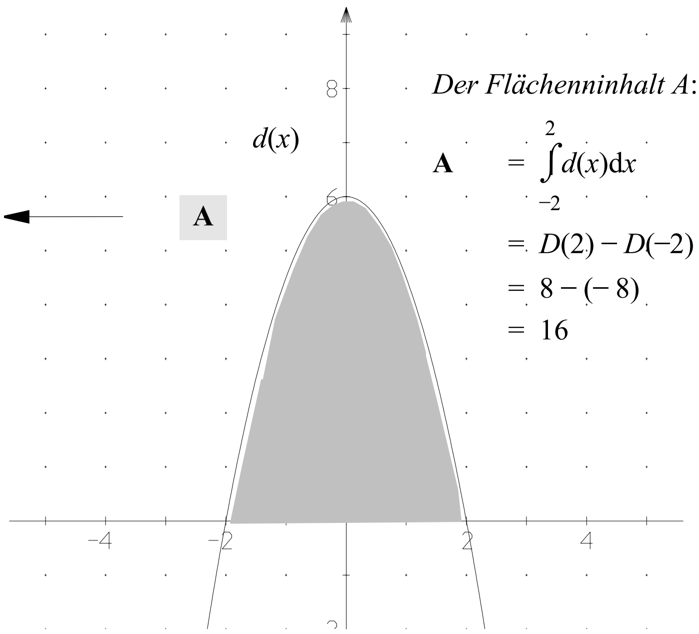
Interpretation der Stammfunktion D(x):



Die Strecke s:

$$\mathbf{s} = D(2) - D(-2) = 8 - (-8) = 16 = \int_{-2}^{2} d(x)\,\mathrm{d}x$$

Der Inhalt der Fläche A unterhalb der Funktion d(x) entspricht der Länge der Strecke D(2) - D(-2) der Stammfunktion D(x).



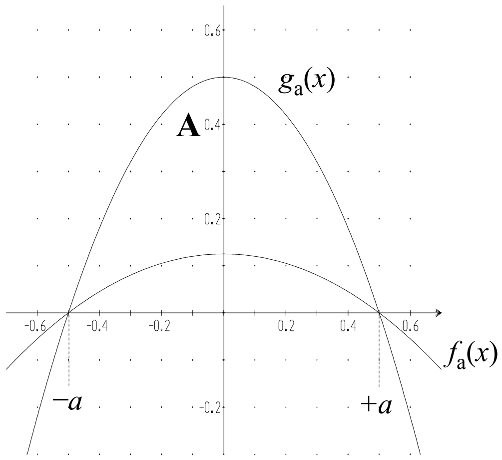
Der Flächenninhalt A:

$$\mathbf{A} = \int_{-2}^{2} d(x)\,\mathrm{d}x = D(2) - D(-2) = 8 - (-8) = 16$$

3.5

$f_a(x) = -\,a\,x^2 + a^3$ und $g_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a$ mit der Bedingung: $a \in \,]0\,/1[$

Da $0 < a < 1$ gilt, so ist stets $a^3 < a$, d.h., der Graph von $g_a(x)$ liegt *oberhalb* des Graphen von $f_a(x)$:



Beide Funktionenscharen schneiden sich auf der x−Achse an den Stellen − a und + a. Die allgemeine Formel für den Flächeninhalt A zwischen f_a und g_a beträgt:

$$A \;=\; 2\int_0^a [g_a(x) - f_a(x)]\,dx \qquad \text{(Wegen Achsensymmetrie)}$$

$$=\; 2\int_0^a [\,(-\tfrac{1}{a}x^2 + a) - (-\,a\,x^2 + a^3)]\,dx$$

$$=\; 2\int_0^a (-\tfrac{1}{a}x^2 + a + a\,x^2 - a^3)\,dx$$

$$=\; 2\,\Big[-\frac{1}{a}\frac{x^3}{3} + ax + a\,\frac{x^3}{3} - a^3x\,\Big]_0^a$$

$$=\; 2\,\Big[\Big(-\frac{1}{a}\frac{a^3}{3} + aa + a\,\frac{a^3}{3} - a^3a\Big) - (0)\Big]$$

$$=\; 2\,\Big(-\frac{a^2}{3} + a^2 + \frac{a^4}{3} - a^4\Big) \quad=\; 2\,\Big(\frac{-\,a^2 + 3a^2 + a^4 - 3a^4}{3}\Big)$$

$$=\; 2\,\Big(\frac{2a^2 - 2a^4}{3}\Big) \quad=\quad \frac{4}{3}(a^2 - a^4)$$

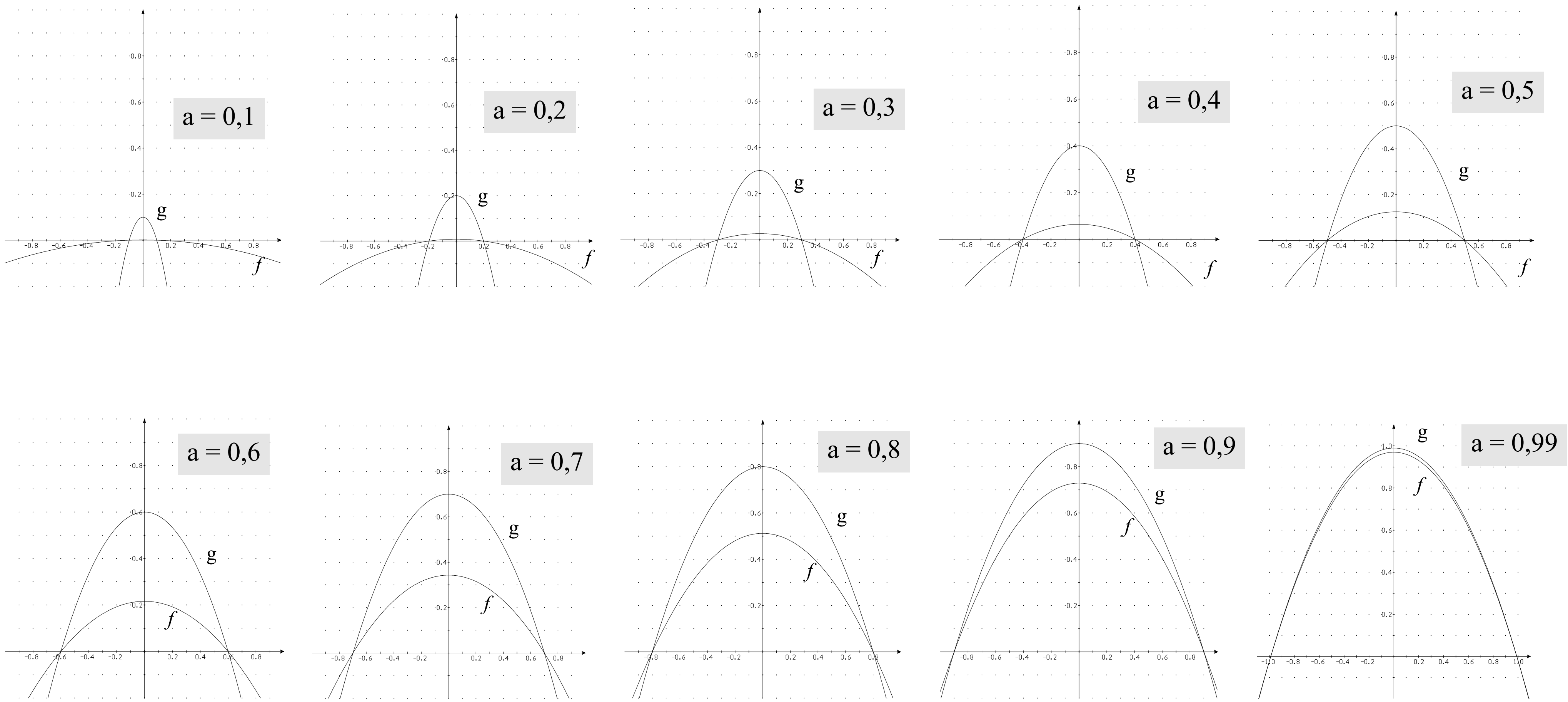
Damit haben wir eine *allgemeine* Formel für den Flächeninhalt A in Abhängigkeit vom Parameter a gefunden. Wir schreiben daher auch A(a), um diese Abhängigkeit der Fläche A von der Variablen a auszudrücken. Es gilt also:

$$A(a) \;=\; \frac{4}{3}(a^2 - a^4) \quad \text{für alle Werte von } a \in \,]0/1[.$$

Wir wollen nun für einige konkrete Werte von a die dazugehörigen Flächen graphisch veranschaulichen:

Zu 3.5: Überblick über die Fläche A(a) für a $\in$] 0 / 1 [

zwischen $f_a(x) = -\,a\,x^2 + a^3$ und $g_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a$



3.6. *Bestimmung des Maximums der Fläche A(a)*

Die Frage ist jetzt, für welche Werte a $\in$]0/1[der Flächeninhalt A(a) = $\frac{4}{3}(a^2 - a^4)$ am größten ist. Dazu setzen wir a = x und betrachten die Hilfsfunktion: $h(x) = \frac{4}{3}(x^2 - x^4)$.

Sie ordnet jedem x (= a) den Flächeninhalt zwischen den beiden Funktionen f_a und g_a zu. Dort, wo die Hilfsfunktion h ihr Maximum hat, ist der Flächeninhalt am größten. Also müssen wir nun die lokalen Maxima der Funktion $h(x)$ im Intervall]0/1[berechnen:

1. *Notwendige Bedingung: h' (x) = 0*

$h'(x) = \frac{4}{3}(2x - 4x^3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 4x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1 - 2x^2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 0 \lor 1 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor 1 - 2x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \lor 2x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \lor x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$,

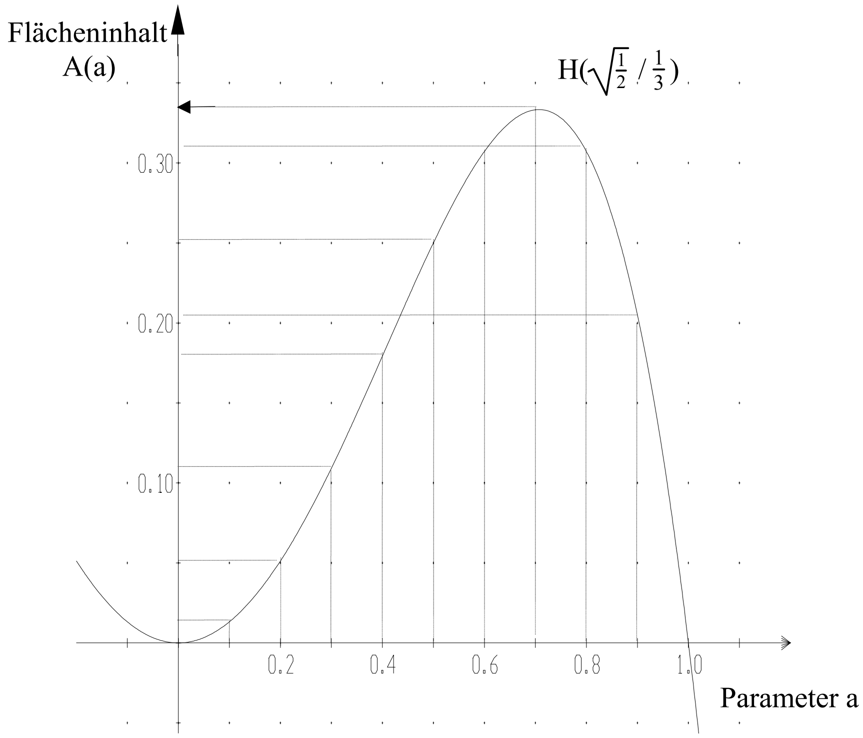
da aber x = a $\in$]0/1[ist, gilt nur: $\mathbb{L} = \{+\sqrt{\frac{1}{2}}\}$

2. *Hinreichende Bedingung: h' (x) = 0 $\land$ h'' (x) $\neq$ 0* $\quad [\, h''(x) = \frac{4}{3}(2 - 12x^2) \,]$

$h''(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{4}{3}(2 - 12(\sqrt{\frac{1}{2}})^2) = \frac{4}{3}(2 - 6) = -\frac{16}{3} < 0$, d.h. *h(x)* hat bei $x = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71$

ein lokales Maximum. Der y-Wert lautet: $h(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{4}{3}((\sqrt{\frac{1}{2}})^2 - (\sqrt{\frac{1}{2}})^4) = \frac{4}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{3}$

Also lautet der lokale Hochpunkt: $H(\sqrt{\frac{1}{2}} / \frac{1}{3})$



Damit ist die Aufgabe gelöst. Der Flächeninhalt A(a) = $\frac{4}{3}(a^2 - a^4)$ ist innerhalb des Intervalls]0/1[für $x = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71$ am größten. Er beträgt dann $A(\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}$.

4. Aufgabe

Gegeben sei die quadratische Parabel: $f(x) = 4x^2 - 2x$.

4.1. Berechnen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt von f und zeichnen Sie $\mathfrak{G}_f$ in ein unteres

Koordinatensystem.

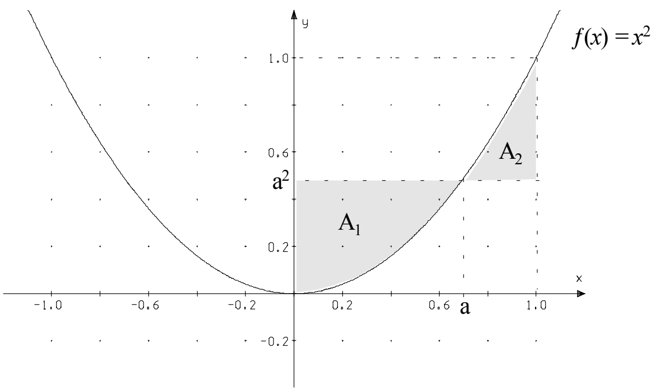
4.2. Bilden Sie die Stammfunktion F von f, welche die y-Achse bei $y = \frac{1}{3}$ schneidet. Zeichnen Sie aufgrund von $\mathfrak{G}_f$ den Graphen der Stammfunktion F in ein oberes Koordinatensystem.

4.3. Berechnen Sie die Differenz $F(\frac{1}{2}) - F(0)$ und interpretieren dieses Ergebnis geometrisch anhand

der beiden eingezeichneten Funktionsgraphen $\mathfrak{G}_f$ und $\mathfrak{G}_F$.

4.4. Gegeben sie die Funktion $f(x) = x^2$ und ein Parameter a aus dem Intervall $a \in [0/1]$.

Dann entstehen nach der folgenden Konstruktion zwei Flächen A_1 und A_2 :



a) Setzen Sie $a = \frac{1}{2}$ und berechnen Sie die beiden Flächeninhalte A_1 und A_2.

b) Bestimmen Sie allgemein für $a \in [0/1]$ die Flächeninhalte $A_1(a)$ und $A_2(a)$ in Abhängigkeit von a.

c) Bilden Sie die Summe $A(a) = A_1(a) + A_2(a)$ und untersuchen Sie, für welches $a \in$ [0/1] die

Summe A(a) am am kleinsten ist.

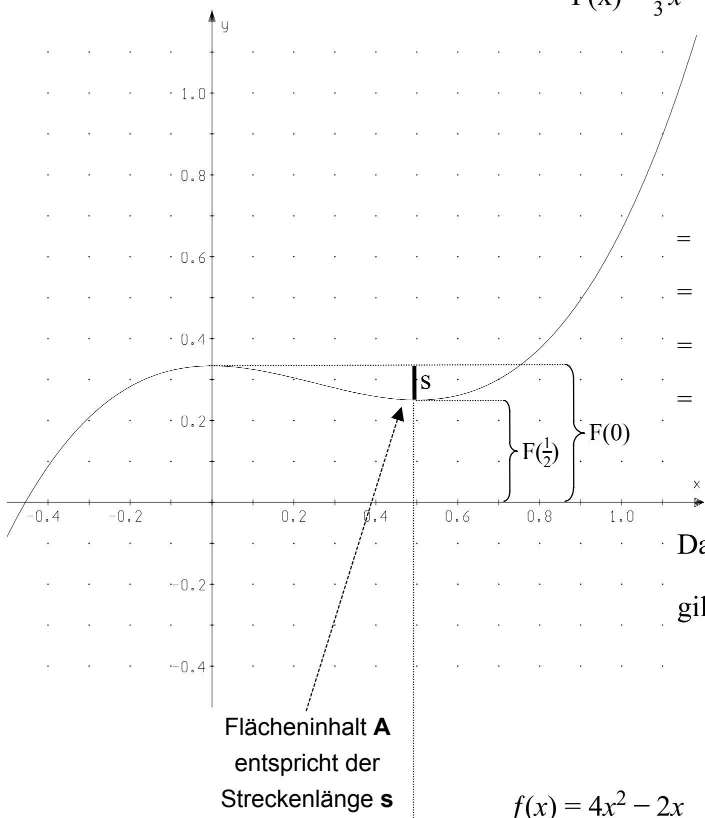
Tip:

Sie können die Aufgabe vereinfachen, wenn Sie die Ergebnisse von (1.1) bis (1.2) benutzen.

Lösung

4. Aufgabe

$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$



$F(\frac{1}{2}) - F(0)$

$= [\frac{4}{3}(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}] - [\frac{1}{3}]$

$= [\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}] - [\frac{1}{3}]$

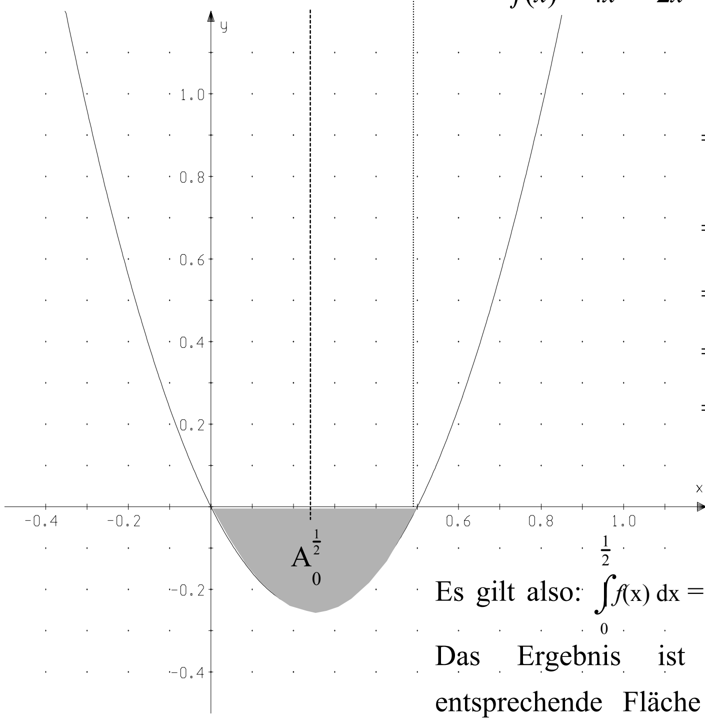
$= \frac{3}{12} - \frac{4}{12}$

$= -\frac{1}{12}$

Da $F(\frac{1}{2}) < F(0)$ ist,

gilt: $F(\frac{1}{2}) - F(0) < 0$!

$f(x) = 4x^2 - 2x$



$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

$= [\frac{4}{3}x^3 - 2x]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 - 0$

$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$

$= -\frac{1}{12}$

Es gilt also: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = F(\frac{1}{2}) - F(0) = -\frac{1}{12}$.

Das Ergebnis ist negativ, weil die entsprechende Fläche $A_0^{\frac{1}{2}}$ *unterhalb* der *x*-

5. Aufgabe

1. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = 2x^2 \cdot \sqrt{2-x}$, $x \in \mathbb{D}_f$.

1.1 Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung durch, indem Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte bestimmen.

1.2 Zeichnen Sie den Graphen $\mathbb{G}_f$ in ein Koordinatensystem (1 E = 2 cm).

1.3 Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{h \to 0} f'(2-h)$ mit $h > 0$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

1.4 Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x = 2$ nicht differenzierbar ist.

Lösung

1.1.

I. Definitionsbereich: $\mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 2\} = \,]-\infty\,; 2\,]$

II. Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \vee \sqrt{2-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

III. Ableitungen:

$$f'(x) = 4x \cdot \sqrt{2-x} + \cancel{2}x^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2-x}} \cdot (-1)$$

$$= \frac{4x(2-x) - x^2}{\sqrt{2-x}} = \frac{8x - 5x^2}{\sqrt{2-x}}$$

Achtung: $\mathbb{D}_{f'} = \mathbb{D}_f \setminus \{2\} = \,]-\infty\,; 2\,[$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{2-x} \cdot (8-10x) - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} \cdot (-1) \cdot (8x-5x^2)}{2-x}$$

$$= \frac{\frac{2 \cdot \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{2-x} \cdot (8-10x) + (8x-5x^2)}{2 \cdot \sqrt{2-x}}}{(2-x)}$$

$$= \frac{2 \cdot (2-x) \cdot (8-10x) + (8x-5x^2)}{2 \cdot (2-x) \cdot \sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{32 - 40x - 16x + 20x^2 + 8x - 5x^2}{2 \cdot \sqrt{(2-x)^3}} = \frac{15x^2 - 48x + 32}{2 \cdot \sqrt{(2-x)^3}}$$

Auch hier gilt: $\mathbb{D}_{f''} = \mathbb{D}_f \setminus \{2\} = \,]-\infty\,; 2\,[$

IV. Extrempunkte:

a) Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{8x - 5x^2}{\sqrt{2-x}} = 0 \Leftrightarrow 8x - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x(8 - 5x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \tfrac{8}{5} = 1{,}6$$

b) Hinereichende Bedingung: VZW von f': (da der Nenner $\sqrt{2-x} > 0$) braucht man nur den Zähler zu betrachten: $z(-1) = -13 < 0$; $z(1) = 3 > 0$; $z(1{,}8) = -1{,}8 < 0$, das heißt: f hat bei x = 0 einen VZW(–/+) und bei $x = \frac{8}{5} = 1{,}6$ einen VZW(+/–), also hat f bei x = 0 ein lokales Minimum und bei $x = \frac{8}{5} = 1{,}6$ ein Lokales Maximum.

c) y-Werte:
$f(0) = 0 \Rightarrow$ T(0/0) lokaler Tiefpunkt ;
$f(\frac{8}{5}) = 3{,}24 \Rightarrow$ H (1,6 / 3,24) lokaler Hochpunkt.

V. Wendepunkte:

a) Notwendige Bedingung $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{15x^2 - 48x + 32}{2 \cdot \sqrt{(2-x)^3}} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 48x + 32 = 0 \mid : 15$$

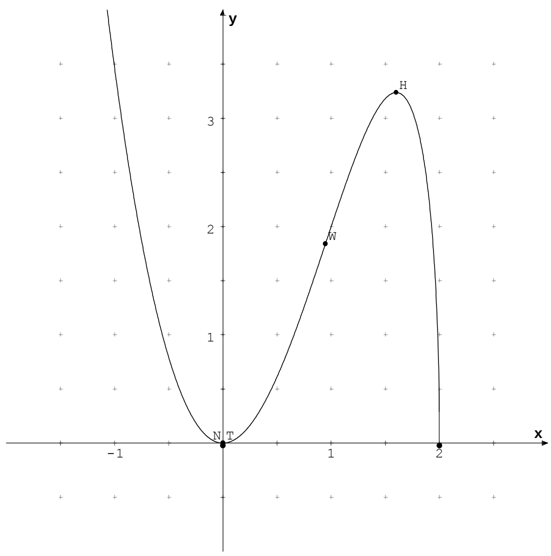
$$\Leftrightarrow x^2 - 3{,}2x + 2{,}13 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}6 \pm \sqrt{3{,}2^2 - 2{,}13} \Leftrightarrow x = 0{,}95 \vee x = 2{,}55.$$

Da $2{,}55 \notin \mathbb{D}_f$ so gilt nur $\Leftrightarrow x = 0{,}95$

b) Hinreichende Bedingung: VZW von f'': (da der Nenner $2\sqrt{(2-x)^3} > 0$) braucht man nur den Zähler zu betrachten: $z(0) = 32 > 0$; $f''(1) = -1 < 0$; das heißt, f ist vor 0,95 linksgekrümmt und nach 0,95 rechtsgekrümmt.
Also gilt: f hat bei x = 0,95 eine LR-Wendestelle.

c) y-Wert: $f(0{,}95) = 1{,}84 \Rightarrow$ LR-W(0,95/1,84).

1.2. Zeichnung:



1.3. Wir bilden zuerst: $f'(2-\text{h}) = \dfrac{8(2-h)-5(2-h)^2}{\sqrt{2-(2-h)}} = \dfrac{16-8h-5(4-4h+h^2)}{\sqrt{h}}$

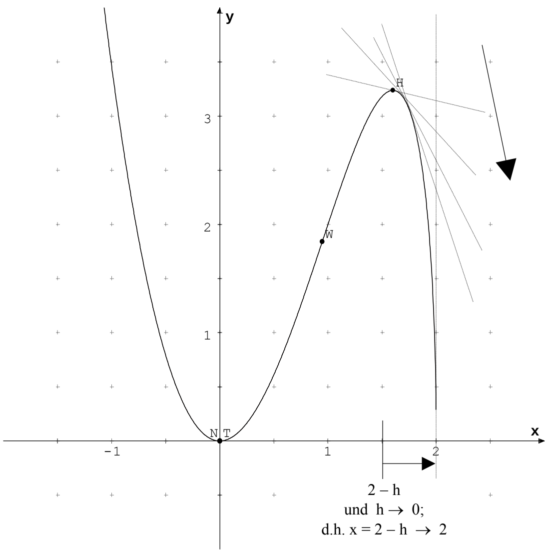
$$= \frac{16-8h-20+20h-5h^2}{\sqrt{h}} = \frac{-4+12h-5h^2}{\sqrt{h}}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{h}} + 12\sqrt{h} - 5\cdot h\sqrt{h}\,.$$

Da nun $\lim\limits_{h\to 0}(12\sqrt{h}) = 0$ und $\lim\limits_{h\to 0}(5\cdot h\sqrt{h}) = 0$ gilt; und ferner $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{-4}{\sqrt{h}}\right) = -\infty$

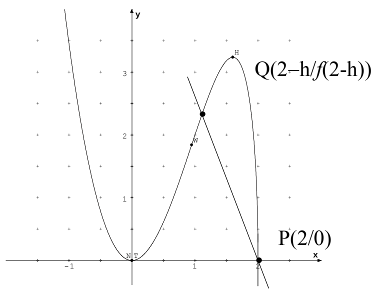
ist, gilt schließlich: $\lim\limits_{h\to 0} f'(2-\text{h}) = -\infty$ (d.h. der Term ist bestimmt divergent gegen $-\infty$)

Geometrische Interpretation:



Die Steigungen der Tangenten von $f(x)$ werden für h → 0 (h > 0) immer kleiner und nähern sich der Geraden:
G = {P(x/y) | x = 2}, die zur y-Achse parallel verläuft.
Diese Gerade ist selbst aber keine *Tangente* von $f(x)$; denn eine Tangente hat stets die Form einer linearen Funktion t(x) = mx + b mit einer konkreten Steigung $m \in \mathbb{R}$.
Demnach hat $f(x)$ an der (definierten) Stelle $x = 2 \in \mathbb{D}_f$ keine Tangente, ist dort also nicht differenzierbar

Nachweis, daß f an der Stelle x = 2 nicht (auch nicht einseitig!) differenzierbar ist. Dazu betrachten wir den Differenzenquotienten:
Wir haben für h > 0die Punkte: Q(2–h/f(2–h)) und P(2/0),
dann betrachten wir den linksseitigen Grenzwert:



$$\text{l-}\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-0}{(2-h)-2} = \text{l-}\lim_{h\to 0}\frac{2(2-h)^2\sqrt{2-(2-h)}}{-h}$$

$$= \text{l-}\lim_{h\to 0}\frac{(8-8h+2h^2)\sqrt{h}}{-h} = \text{l-}\lim_{h\to 0}\left(\frac{8}{-\sqrt{h}} - 8\sqrt{h} + 2\,h\sqrt{h}\,.\right)$$

Da nun l-$\lim\limits_{h\to 0}(-8\sqrt{h}) = 0$ und l-$\lim\limits_{h\to 0}(2\cdot h\sqrt{h}) = 0$ gilt; und

ferner l-$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{8}{-\sqrt{h}}\right) = -\infty$ ist, so heißt dies, dass f an der Stelle

$x = 2$ nicht differenzierbar ist, dort also keine Tangente mit einer reellen Steigung $m \in \mathbb{R}$ besitzt.