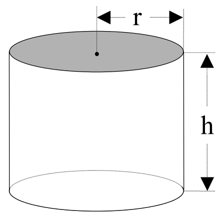
Analysis Anwendungen

Wi

1. Das Konservendosen-Problem

Ein Konservendosenhersteller will zylindrische Dosen mit einem Inhalt von einem Liter, das sind 1000 cm^3, herstellen und dabei möglichst wenig Material verbrauchen. Wie groß muß er den
Radius r und die Höhe h wählen, damit die Oberfläche (= Materialverbrauch) möglichst klein ist? Siehe Skizze:



Lösung:

1. Für das Volumen gilt die Formel: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 1000\ [cm^3]$.
2. Für die Oberfläche gilt die Formel: $O = \underbrace{2 \cdot r^2 \cdot \pi}_{\text{2 Deckflächen}} + \underbrace{2 \cdot r \cdot \pi \cdot h.}_{\text{Mantelfläche}}$

Aus (1) folgt: $h = \frac{1000}{r^2 \cdot \pi}$ in (2) eingesetzt, ergibt dann: $O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{1000}{r^2 \cdot \pi}$

Also erhalten wir die Formel für die Oberfläche: $O \approx 6{,}28 \cdot r^2 + \frac{2000}{r}$

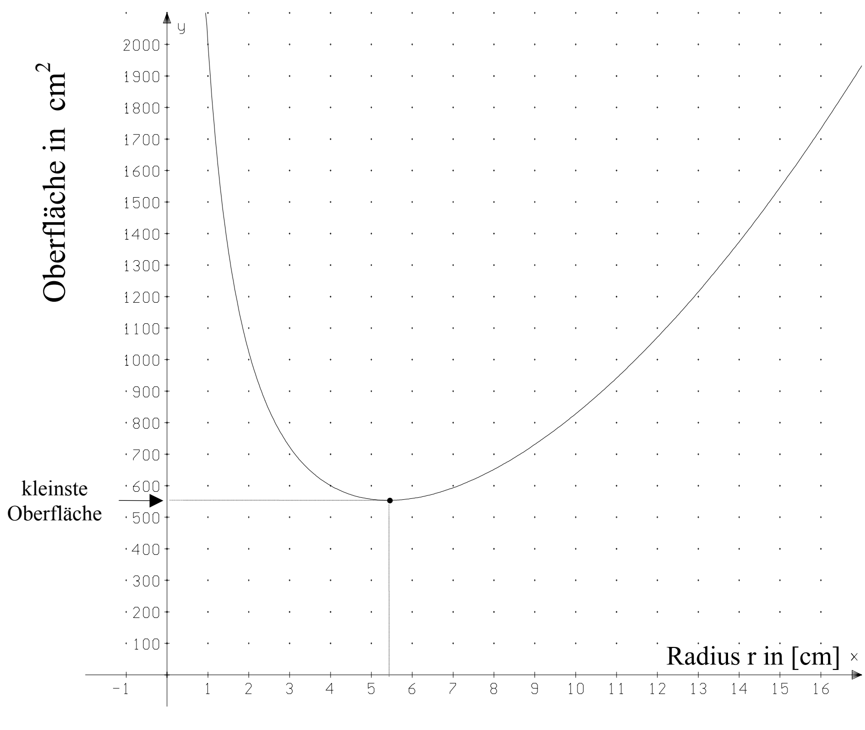
Diese Oberfläche O des Zylinders, die als "Material" zur Herstellung einer Dose gebraucht wird, hängt also nur von dem Radius r ab. Insofern ist die Oberfläche eine **Funktion** von r (= Radius), die wir ähnlich der Funktionsschreibweise $f(x)$ nun mit **O(r)** bezeichnen können. Die Funktionswerte von O(r) entsprechen dann der Oberfläche des Zylinders in [cm^2].

Die Aufgabe besteht nun darin, herauszufinden, für welchen Radius r die Oberflächenfunktion O(r) ein Minimum annimmt. Wir zeichnen mit Hilfe einer Wertetabelle zunächst einmal den Graphen der Funktion O(r):

Wertetabelle

r cm	O(r) cm^2
1	2006
2	1025
3	723
4	600
5	556
6	558
7	592
8	650
9	729
10	826
11	939
12	1068
13	1211
14	1369
15	1541
16	1727

Graph der Oberflächenfunktion $O(r) \approx 6{,}28 \cdot r^2 + \frac{2000}{r}$



Rechnerische Lösung:

Um den kleinsten Wert der Oberfläche O(r) zu *berechnen*, müssen wir mit Hilfe der Differentialrechnung das Minimum der Funktion: $O(r) \approx 6{,}28 \cdot r^2 + \frac{2000}{r}$ bestimmen. Dazu bestimmen wir zunächst die ersten beiden Ableitungen (r ist die Funktionsvariable):

$$O'(r) = 2 \cdot 6{,}28 \cdot r - \frac{2000}{r^2}$$

$$O''(r) = 12{,}56 + \frac{4000}{r^3}$$

1. Notwendige Bedingung: $O'(r) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot 6{,}28 \cdot r - \frac{2000}{r^2} = 0 \;\; | \cdot r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 12{,}56 \cdot r^3 - 2000 = 0 \;\; | \cdot + 2000 \;\; | : 12{,}56$$

$$\Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{2000}{12{,}56} \;\; | \;\; \sqrt[3]{}$$

$$\Leftrightarrow \quad r \approx 5{,}4 \;\; [cm]$$

2. Hinreichende Bedingung: $O'(r) = 0 \;\wedge\; O''(r) \neq 0$

$$O''(r) = 12{,}56 + \frac{4000}{r^3}$$

$$O''(5{,}4) = 12{,}56 + \frac{4000}{5{,}4^3} > 0 \;\Rightarrow\; O(r) \text{ hat bei } r \approx 5{,}4 \text{ [cm] ein lokales Minimum.}$$

3. Funktionswert: $O(5{,}4) \approx 6{,}28 \cdot 5{,}4^2 + \frac{2000}{5{,}4} \approx 552 \;\; [cm^2]$.

Daraus folgt: die Funktion $O(r) \approx 6{,}28 \cdot r^2 + \frac{2000}{r}$ hat einen lokalen Tiefpunkt bei: T(5,4 / 5,52)

Damit erhalten wir das folgende Ergebnis:

> Wenn der Radius r der Dose den Wert $r \approx 5{,}4$ cm hat, dann ist ihre Oberfläche am kleinsten, sie beträgt dann $O(5{,}4) \approx 552 \text{ cm}^2$. Bei jedem anderen Radius ist die Oberfläche - also der Materialverbrauch der Dose - größer.

Jetzt müssen wir noch die Höhe der Dose bestimmen.

Dazu setzen wir das berechnete Ergebnis für den Radius: $r \approx 5{,}4$ in die Formel (1) ein: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h = 1000 \;\Leftrightarrow\; h = \frac{1000}{r^2 \cdot \pi}$. Wir erhalten dann:

$$h \approx \frac{1000}{5{,}4^2 \cdot 3{,}14} \;\Leftrightarrow\; h \approx 10{,}9 \;\; [cm]$$

Damit ist die Aufgabe gelöst:

Bei einem Inhalt von 1 Liter hat eine zylindrische Konservendose dann den kleinsten Materialverbrauch, wenn der Radius r den Wert $r \approx 5{,}4$ [cm] und die Höhe h den Wert $h \approx 10{,}9$ [cm] hat. Wir wollen diese Lösung nun verallgemeinern:

Allgemeine Lösung:

Das konkrete Ergebnis nährt die Vermutung, ob für ein beliebiges Volumen V der die optimalen Werte darin bestehen, daß die Höhe h doppelt so groß´ist wie der Radius. Das werden wir nun zeigen. Beweisen Sie diese Vermutung!

Lösung allgemein für ein beliebiges Volumen V:

Für ein allgemeines Volumen V lautet die Oberflächenfunktion: $O(r) \approx 2\cdot\pi\cdot r^2 + \frac{2\cdot V}{r}$

1. Notw. Bed.: $O'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cdot\pi\cdot r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \quad 4\cdot\pi\cdot r^3 - 2V = 0$

   $\Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{2V}{4\cdot\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}$

2. Hinreichende Bedingung: $O'(r) = 0 \wedge O''(r) \neq 0$

   $O''(r) = 4\cdot\pi + \frac{4V}{r^3} \quad O''(\sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}) = 4\pi + 8\pi > 0 \quad \Rightarrow$ O(r) hat bei $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}$ ein lokales Minimum.

Berechnung von h:

$$h = \frac{V}{r^2\cdot\pi} = \frac{V}{[\sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}]^2\cdot\pi} = \frac{\sqrt[3]{V^3}}{\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\cdot\pi^2}}\cdot\sqrt[3]{\pi^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}}$$

$$= 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2\cdot r$$

2. Das Luftröhrenproblem

Die Luftröhre (Trachea) ist ein schlauchartiges Organ, das vom Kehlkopf in die Lunge führt und das Aus- und Einströmen der Atemluft vermittelt. Beim Erwachsenen ist die Luftröhre etwa $10-14$ cm lang und $1{,}2-2$ cm (Durchmesser) weit.

Wenn wir husten, kann sich die Luftröhre bis zu 50% zusammenziehen, um die Geschwindigkeit der ausströmenden Luft zu erhöhen. Biologen haben experimentell festgestellt, daß unter normalen Bedingungen die Geschwindigkeit v [$\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$] des Luftstroms in der Luftröhre vom Radius r [cm] abhängig ist und durch die folgende Funktionsgleichung gegeben ist:

$$v(r) = c\cdot(r_0 - r)\cdot r^2. \qquad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0$$

v (velocity) = Geschwindigkeit des Luftstroms, abhängig von r

c = Konstante

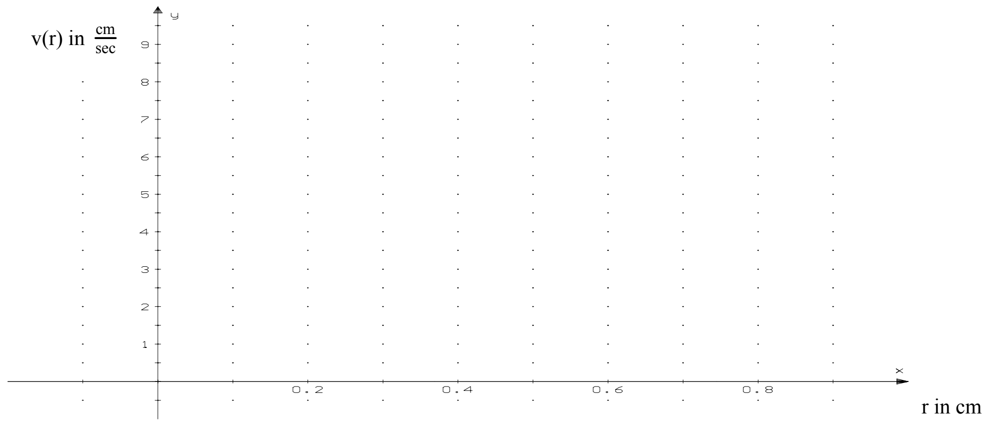
r_0 = Ruheradius

r = variabler Radius

Die Variable r_0 ist also der Ruheradius der Luftröhre, der zwischen 0,6 - 1 cm liegt, und die Variable $c > 0$ ist eine Konstante, die u.a. von der Länge der Luftröhre abhängt.

Aufgaben:

1. Setzen Sie konkret $c = 100$ und $r_0 = 0{,}8$ (durchschnittlicher Radius beim Menschen). Untersuchen Sie die Funktion $v(r) = 100\cdot(0{,}8 - r)\cdot r^2$ im Definitionsbereich: $0{,}4 \le r \le 0{,}8$. Bestimmen Sie dazu die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion v(r).
2. Zeichnen Sie den Graphen von v(r) in das unten vorbereitete Koordinatensystem, indem Sie den Bereich $0 \le r < 0{,}4$ gestrichelt und den Definitionsbereich $0{,}4 \le r \le 0{,}8$ voll einzeichnen. Interpretieren Sie anschließend die Zeichnung.

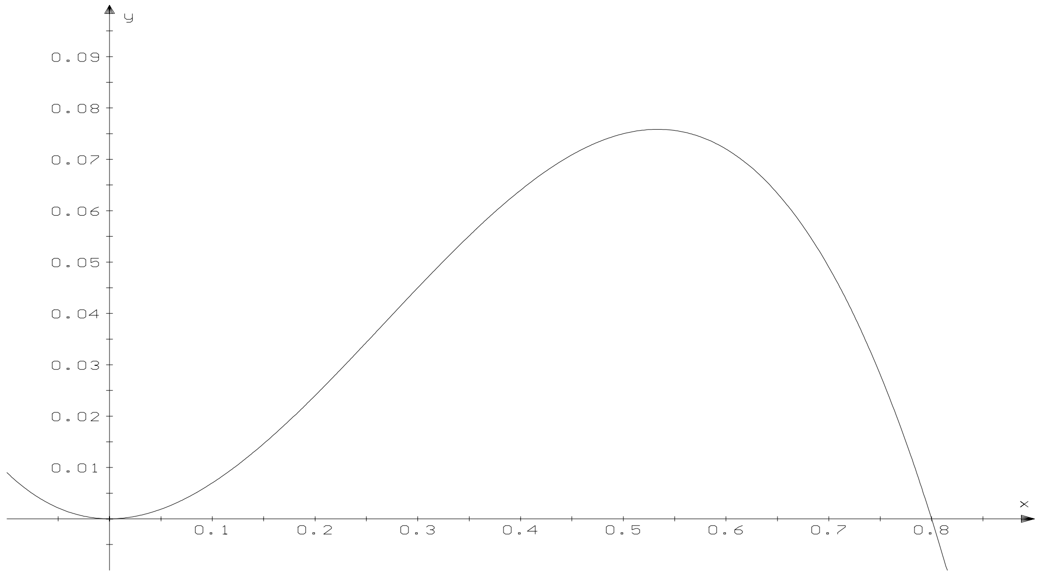


3. Beweisen Sie allgemein für eine beliebige Konstanten $c \in \mathbb{R}^+$ und einen beliebigen Ruheradius $r_0 \in \mathbb{R}^+$, daß die Luftröhre genau dann die *größte* Geschwindigkeit v(r) (und damit die größte Wirkung beim Husten) erzielt, wenn sie sich um $\frac{1}{3}$ von ihrem Ruheradius r_0 zusammenzieht.

   Röntgenaufnahmen bestätigen, daß sich die Luftröhre während des Hustens in der Tat um $\frac{1}{3}$, d.h. etwa um 33 %, zusammenzieht, um die höchste Strömungsgeschwindigkeit zu erzielen.

Bemerkung:
Es ist verblüffend, daß sich die Natur hier in einer Weise verhält, die im mathematischen Sinne *optimal* ist.

Lösung:



3. Lungenentzündung

Eine Lungenentzündung wird meist durch bestimmte Bakterien, sogenannte Pneumokokken (*griech. pneumon = Lunge, kokkos = Kern, Keim*), hervorgerufen. Bakterien sind Einzeller und vermehren sich durch Zellteilung. Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienkultur nimmt innerhalb einer Zeiteinheit, z.B. innerhalb eines Tages, um so stärker zu, je mehr Bakterien zu Beginn dieses Zeitraumes vorhanden sind. Insofern vermehrt sich pro Tag nicht nur die Anzahl der Bakterien, sondern auch die Wachstums*geschwindigkeit*, was bei Krankheiten wie die Lungenentzündung fatale Folgen haben kann.
Angenommen, man hat festgestellt, daß sich die Pneumokokken im Körper pro Tag um 12 % vermehren (d.h.: an jedem Tag wird damit der Zuwachs größer, weil die Vermehrung von 12 % ja immer von der jeweils schon erreichten Anzahl berechnet wird). Weiter hat man bei einer Blutprobe festgestellt, daß sich zum Zeitpunkt t = 0 (Tagen) eine Anzahl von 300 Pneumokokken in 1 mm^3 Blut befindet.

Aufgaben:

1. Stellen Sie die Wachstumsfunktion W(t) der Bakterien auf und ermitteln Sie mit einer
   Wertetabelle, wieviel Pneumokokken während der ersten 15 Tagen nach der Untersuchung ohne Behandlung zu erwarten sind?
2. Zeichnen Sie die Wachstumsfunktion W(t) der Pneumokokken in ein Koordinatensystem.
3. Nach wieviel Tagen ohne Behandlung hat sich die Anzahl der Pneumokokken verdoppelt, verdreifacht, verfünffacht?
4. Man verfügt über ein Antibiotikum, das in drei Dosen verabreicht wird:

   Die Dosis D_1 kann pro Tag etwa 80 Pneumokokken, Dosis D_2 etwa 100 und Dosis D_3 etwa 120 Pneumokokken pro mm^3 und pro Tag abtöten.

   Zeichnen Sie gemäß dieser drei Dosen die Therapiefunktionen $T_3(t) = 80 \cdot t$, $T_1(t) = 100 \cdot t$ und $T_2(t) = 120 \cdot t$ in das gleiche Koordinatensystem ein.

   Welche Therapie empfiehlt sich, wenn man die Nebenwirkungen mitberücksichtigt?
5. Bestimmen Sie die optimale Dosis für die Therapie, d.h. eine Therapiefunktion:

   $T_m(t) = m\ t$, mit der alle Bakterien getötet werden können, aber möglichst wenig Nebenwirkungen des Medikamentes zur Folge hat.

Lösung:

1.

Die Wachstumsfunktion W(t) ist eine Exponentialfunktion: $W(t) = 300 \cdot 1{,}12^t$, mit dem Anfangswert $a_0 = W(0) = 300$, der Basis b = 1,12 und der Funktionsvariable t als Zeitvariable (t = Anzahl der Tage). Nach 15 Tagen erhalten wir dann also:

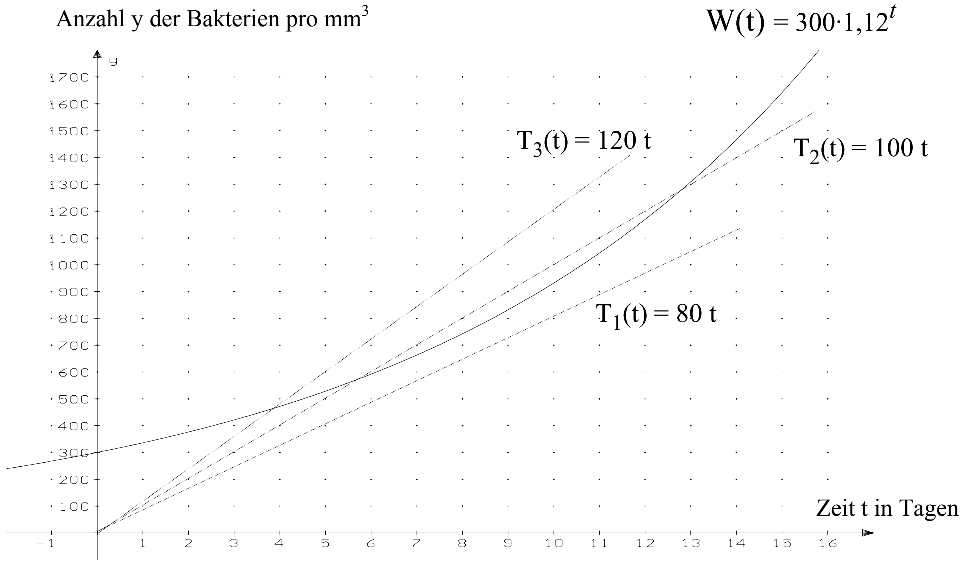
$W(15) = 300 \cdot 1{,}12^{15} \approx 1642$ (Bakterien pro mm^3)

2.

Mit der Funktion $W(t) = 300 \cdot 1{,}12^t$ entsteht die folgende Tabelle:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
W(t)	336	376	421	472	529	592	663	743	832	932	1044	1169	1309	1466	1642

Dazu die Zeichnung des Graphen von W(t) mit den Therapiefunktionen $T_1(t) = 80 \cdot t$, $T_2(t)) = 100 \cdot t$ und $T_3(t)) = 120 \cdot t$:



3.

Verdopplung. Verdreifachung und Verfünffachung:

a) Ansatz: $W(t) = 300 \cdot 1{,}12^t = 2 \cdot 300 \Leftrightarrow 1{,}12^t = 2 \Leftrightarrow t \cdot \ln(1{,}12) = \ln 2$

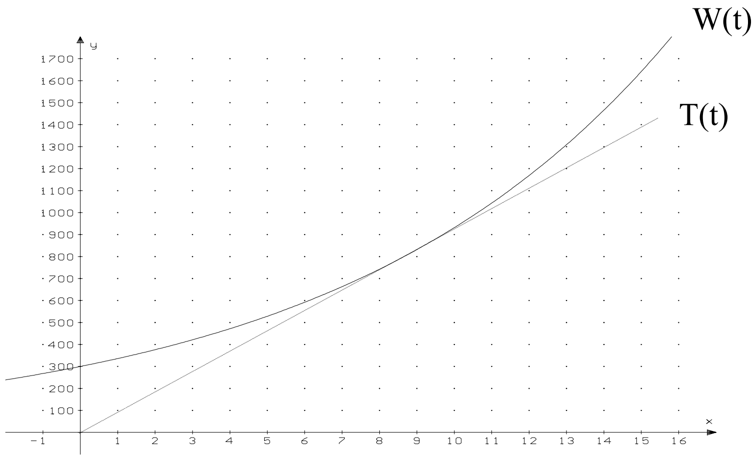
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}12)} \approx 6{,}1$$

b) Ansatz: $W(t) = 300 \cdot 1{,}12^t = 3 \cdot 300 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 3}{\ln(1{,}12)} \approx 9{,}7$

c) Ansatz: $W(t) = 300 \cdot 1{,}12^t = 5 \cdot 300 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 5}{\ln(1{,}12)} \approx 14{,}2$.

4.
Aufgrund der Zeichnung der Funktionsgraphen empfielt sich die Dosis D_2 mit der Therapiefunktion: $T_2(t) = 100$.
Denn die Dosis D_{80} ist zu klein, damit können nicht alle Bakterien getötet werden, und die Dosis D_3 erreicht zwar ihr Ziel früher als D_2, aber hier sind die Nebenwirkungen des Medikamentes zu hoch.

5. Eine Dosis wäre optimal, wenn die Therapiefunktion eine *Tangente* an die Wachstumsfunktion bildet; denn dann werden erstens alle Bakterien abgetötet und zweitens die Nebenwirkungen des Medikamentes minimiert. Siehe Skizze:



Also müssen die folgenden beiden Bedingungen gelten:

(1) $W(t) = T(t)$ und (2) $W'(t) = T'(t)$.

Wir stellen die Wachstumsfunktion zunächst als e-Funktion dar:

$W(t) = 300 \cdot 1{,}12^{t} = 300 \cdot e^{\ln(1{,}12) \cdot t} \approx 300 \cdot e^{0{,}113 \cdot t}$

$\Rightarrow W'(t) \approx 300 \cdot e^{0{,}113 \cdot t} \cdot 0{,}113 \approx 34 \cdot e^{0{,}113 \cdot t}$. Also muß gelten

(1) $300 \cdot e^{0{,}113 \cdot t} = m \cdot t$

(2) $34 \cdot e^{0{,}113 \cdot t} = m$ | in (1) einsetzen

$\Leftrightarrow 300 \cdot e^{0{,}113 \cdot t} = 34 \cdot e^{0{,}113 \cdot t} \cdot t$ | $:(34 \cdot e^{0{,}113 \cdot t})$

$\Leftrightarrow t = \frac{300}{34} \approx 8{,}8$ | in (2) einsetzen

$\Leftrightarrow m \approx 92$.

D.h. es gibt eine Tangente $T(t) = m \cdot t$ mit der Steigung $m \approx 92$ an W(t), die durch den Koordinatenursprung geht und den Graphen von W(t) an der Stelle $t = 8{,}8$ berührt. Der dazugehörige y-Wert ist dann: $T(8{,}8) = 92 \cdot 8{,}8 \approx 810$.

Damit ist die Aufgabe gelöst:

Die Therapiefunktion $T(t) = 92 \cdot t$ stellt eine *Tangentenfunktion* an die Wachtumsfunktion: $W(t) = 300 \cdot 1{,}12^{t}$ in dem Punkt P(8,8 / 810) dar.
Mit einer solchen Dosis gelingt es nach 8,8 Tagen alle bis dahin angewachsenen 810 Bakterien pro mm^3 abzutöten, wobei die Nebenwirkungen des Medikamentes minimal sind.