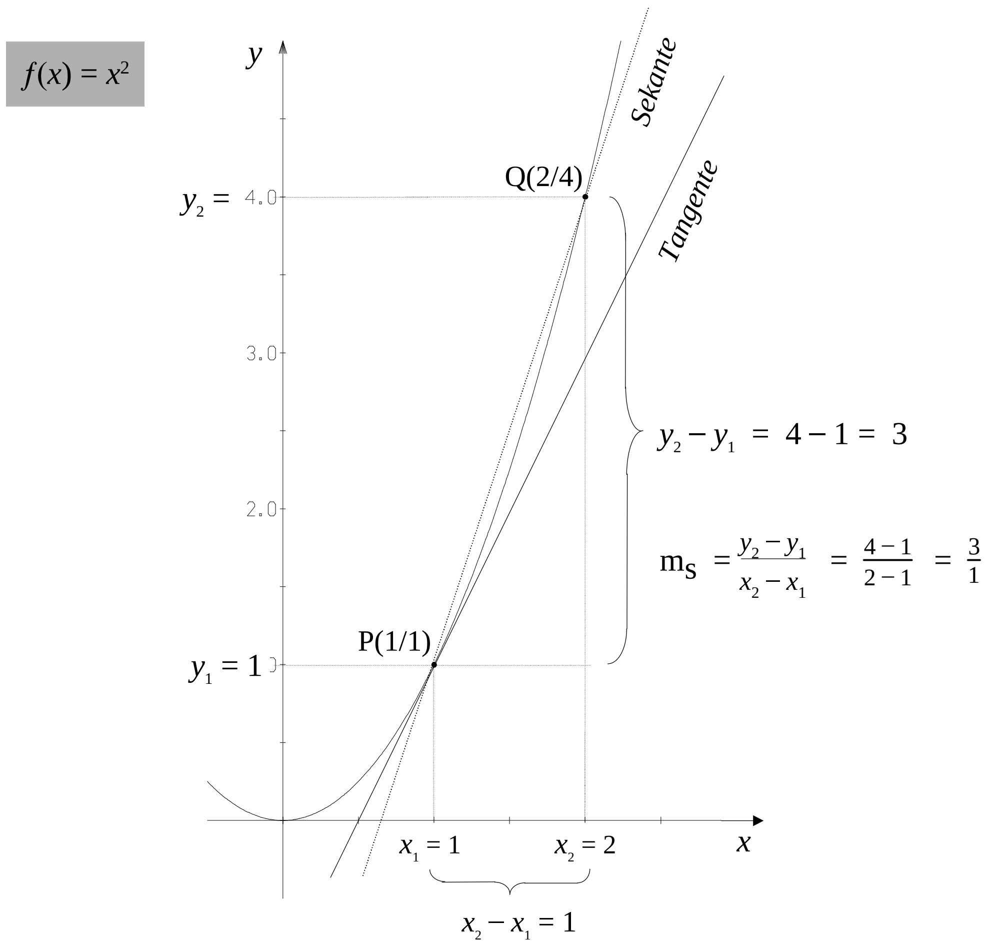
Reiner Winter

Einführung in die Differentialrechnung

1. Das Tangentenproblem als ein Grundproblem der Differentialrechnung

Wir betrachten im folgenden die quadratische Normalparabel, d. h. den Graphen $\mathbb{G}_f$ der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2$, sowie den Punkt P(1/1) auf der Parabel. Wir wollen nun die Steigung der Tangente (lat. tangere = berühren) der Normalparabel im Punkte P(1/1) genau berechnen.

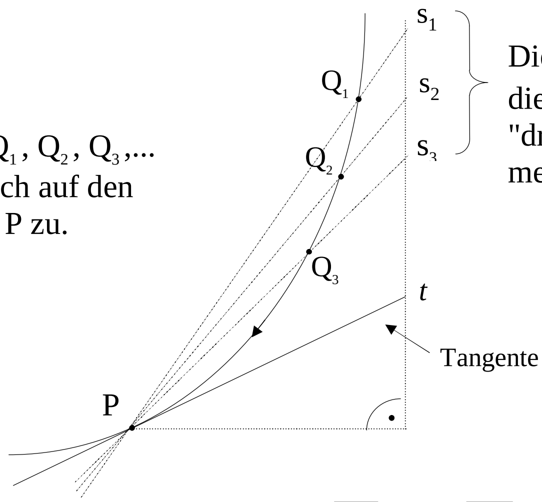
Aus der vorigen Vorbetrachtung über lineare Funktionen haben wir erkannt, daß zur Berechnung der Steigung m einer Geraden *zwei* Punkte $P_1(x_1 / y_1)$ und $P_2(x_2 / y_2)$ benötigt werden. Dann gilt die Formel des Differenzenquotienten: m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. In unserem Fall aber haben wir für die Tangente neben dem Punkt P(1/1) keinen zweiten Punkt gegeben. Wir können also die Steigung der Tangente nicht mit der bekannten Steigungsformel bestimmen. Wenn wir auf der Normalparabel noch einen zweiten Punkt, z.B. Q(2/4) wählen, dann können wir die Steigung der Geraden, die durch P(1/1) und Q(2/4) verläuft, berechnen: m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{2-1} = 3$. Dies ist aber *nicht* die Steigung der gesuchten *Tangente* im Punkt P(1/1), sondern die Steigung einer Geraden, welche die Normalparabel in den beiden Punkten P und Q *schneidet*. Wir nennen eine solche Schnittgerade auch *Sekante* (lat. secare = schneiden). Die Steigung der Sekante durch die Parabelpunkte P und Q beträgt also $m_S = 3$. Siehe dazu die folgende Skizze:



Wir haben nun die Steigung der *Sekante* m_S durch die beiden Punkte P und Q mit $m_S = 3$ berechnet, aber wie kommen wir nun an die Steigung der Tangente?
Nach unserer Zeichnung ist die Steigung der Tangente kleiner als 3, weil die Sekante steiler verläuft als die Tangente. Diese Erkenntnis führt zu der folgenden Überlegung:

Wenn wir nun von dem Punkt Q aus eine Folge von weiteren Punkten Q_1, Q_2, Q_3, usw. längs der Parabel auf den Punkt P "zuwandern" lassen, dann entsteht dasd folgende Bild:

Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3,... bewegen sich auf den Punkt P zu.



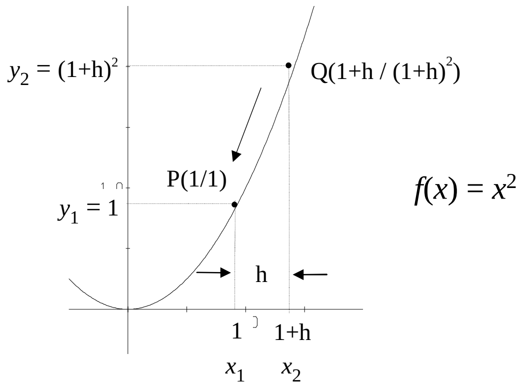
Die Sekanten s_1, s_2, s_3, ... , die sich um den Punkt P "drehen", nähern sich immer mehr der Tangente t.

Wenn wir die entsprechenden Sekanten $s_1 = \overline{PQ_1}$, $s_2 = \overline{PQ_2}$, $s_3 = \overline{PQ_3}$ usw. betrachten, dann stellen wir fest, daß die Folge der Sekanten s_1, s_2, s_3, ... usw. sich immer mehr der Tangente *t* nähern:

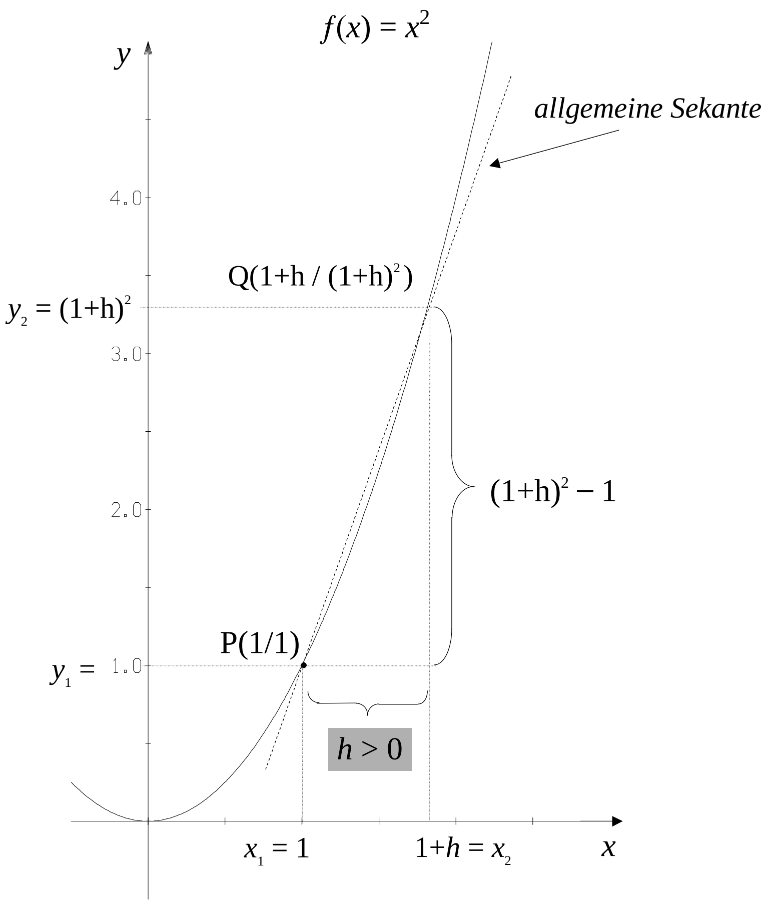
Wir wollen nun die Steigungen der sich um den Punkt P(1/1) "bewegenden" Sekanten allgemein bestimmen. Dazu wählen wir für den Punkt Q eine Darstellung, mit der die "Bewegung zu P" auch allgemein rechnerisch erfaßt werden kann. Das geschieht mit Hilfe einer neuen Variablen "*h*". Mit dem Buchstaben *h* bezeichnen wir die Differenz zwischen den *x*-Koordinaten von P und Q. Wenn wir $P = P_1$ und $Q = P_2$ setzen, dann gilt also: $h = x_2 - x_1$.
Da in unserem Fall $x_1 = 1$ ist, so ist $h = x_2 - 1$ und daher:

$x_2 = 1 + h$ und dann: $y_2 = f(1 + h) = (1 + h)^2$.

Der Punkt Q hat die Koordinatenform: Q(1+*h* / $(1+h)^2$), wir betrachten dazu eine kleine Skizze:



Wir berechnen nun die Steigung der Sekante zwischen P(1/1) und Q(1+*h*/$(1+h)^2$) allgemein für jedes $h > 0$:



Der Punkt $Q(1+h\ /\ (1+h)^2)$ nähert sich dem Punkt P(1/1), wenn der Abstand "*h*" kleiner und kleiner wird und sich immer mehr der Null nähert.

Nun können wir die Steigung der Sekante durch den Punkt P und den Punkt Q, der ja von der Wahl der Variablen *h* abhängt, genau bestimmen.

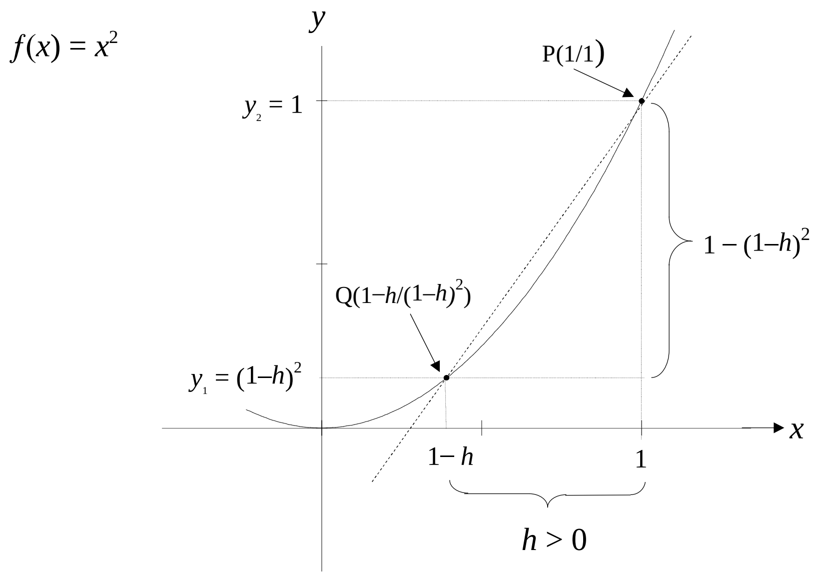
Die Steigung m_S der Sekante durch P(1 / 1) und $Q(1+h\ /\ (1+h)^2)$, d.h.
durch $P(x_1\ /\ y_1)$ und $Q(x_2\ /\ y_2)$ lautet:

$$m_S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{1 + h - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h\,(2+h)}{h} = 2 + h$$

Mit diesem Ergebnis $m_S = 2 + h$ können wir also für jedes $h > 0$ direkt die Steigung der Sekante durch P und Q angeben. Wenn z.B. $h = 0{,}3$ ist, dann ist Q = Q(1,3 / 1,69) und die Steigung der Sekante durch P und Q beträgt $m_S = 2 + 0{,}3 = 2{,}3$.

Wir entwickeln nun eine Formel für die Steigung der Sekante durch P und Q, wenn der Punkt Q sich von links auf den Punlkt P zubewegt:

Die Sekanten nähern sich von links der Tangente:



Die Steigung m_S der Sekante durch P und den Punkt Q, der nun links von P liegt, lautet:

$$m_S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(1-h)^2}{1-(1-h)} = \frac{1-(1-2h+h^2)}{h} = \frac{2h-h^2}{h} = \frac{h\,(2-h)}{h} = 2-h$$

Mit dem Ergebnis $m_S = 2 - h$ können wir also für jedes $h > 0$ nun die Steigung der Sekante durch P und Q angeben, wobei Q links von P liegt.
Wenn z.B. $h = 0{,}4$ ist, dann ist Q = Q(0,6 / 0,36) und die Steigung der Sekante durch P und Q beträgt $m_S = 2 - 0{,}6 = 1{,}4$.

Für die Steigungen der Sekanten durch P(1/1) haben wir nun für h > 0 zwei Formeln entwickelt:

a) Wenn Q rechts von P liegt, dann gilt $m_S = 2 + h$

b) Wenn Q l i n k s von P liegt, dann gilt $m_S = 2 - h$

Wir können diese beiden Formeln zu einer einzigen zusammenfassen, wenn wir für *h* nicht mehr die Bedingung $h > 0$ vorraussetzen, sondern zulassen, daß *h* auch negativ sein darf. Dann kann man die Formel (b) auch mit $m_S = 2 + h$ ausdrücken, wenn und für *h* dann $h < 0$ gilt. Insgesamt erhalten wir dann eine einzige Formel:

Für die Funktion $f(x) = x^2$ sind die Steigungen der *Sekanten* durch P(1/1) und Q(1+*h*/(1+*h*)²) durch die Formel: $m_S = 2 + h$ mit $h \neq 0$ gegeben.

Bemerkung:

Wenn $h > 0$ ist, dann liegt Q *rechts* von P, wenn $h < 0$ ist, dann liegt Q *links* von P.
Aber *h* darf nicht gleich Null gewählt werden, denn für $h = 0$ wäre der Ausdruck:

$\frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{0}{0}$ nicht definiert, weil durch die Zahl 0 nicht dividiert werden kann!

Mit der Formel für die Sekantensteigungen: $m_S = 2 + h$ betrachten wir nun tabellarisch, wie sich die Sekantensteigungen ändern, wenn sich Q dem Punkt P(1/1) nähert:

	h	$Q_n\ (1+h/(1+h)^2)$	$m_S = 2 + h$
	+0,5	$Q_1(1{,}5\ /\ 2{,}25)$	2,5
Q_n nähert sich von *rechts* dem Punkt P(1/1)	+0,2	$Q_2(1{,}2\ /\ 1{,}44)$	2,2
	+0,1	$Q_3(1{,}1\ /\ 1{,}21)$	2,1
	+0,01	$Q_4(1{,}01\ /\ 1{,}0201)$	2,01
	+0,001	$Q_5(1{,}001\ /\ 1{,}002001)$	2,001
	$h \neq 0$	P(1/1)	m_t = ?
Q_n nähert sich von *links* dem Punkt P(1/1)	–0,001	$Q_5(0{,}999\ /\ 0{,}998001)$	1,999
	–0,01	$Q_4(0{,}99\ /\ 0{,}9801)$	1,99
	–0,1	$Q_3(0{,}9\ /\ 0{,}81)$	1,9
	–0,2	$Q_2(0{,}8\ /\ 0{,}64)$	1,8
	–0,5	$Q_1(0{,}5\ /\ 0{,}25)$	1,5

Die Tabelle macht den folgenden Zusammenhang deutlich:

Je näher der Punkt Q beim Punkt P(1/1) liegt, d.h. je näher der die Zahl *h* bei 0 und damit die Zahl 1+*h* bei 1 liegt, um so näher liegt der Wert der Sekantensteigung $m_S = 2 + h$ bei der Zahl 2.

Die Variable *h* darf selbst aber nicht 0 sein. Diesen Sachverhalt formalisieren wir wie folgt:

$$\lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

Lies: Der Limes (Grenzwert) von 2+*h* für *h* gegen Null ist gleich 2.

Dabei bedeutet lim = limes, lat. Grenze

Die Steigungen der Sekanten nähern sich also immer mehr dem Wert 2, je mehr sich der Punkt Q dem Punkt P(1/1) nähert. Da nun *jede* von 2 verschiedene Zahl $2 + h$ mit $h \neq 0$ die Steigung einer Sekante durch P(1/1) und einen weiteren Punkt Q auf der Parabel angibt, entsteht die Frage, welche Bedeutung dann die Zahl 2 selbst hat. Sie kann nicht die Steigung einer Sekante sein. Von daher können wir die Zahl 2 als die Steigung der *Tangente* von $\mathbb{G}_f$ im Punkt P(1/1) betrachten.

Die Zahl 2 wird also als Steigung m_t der gesuchten Tangente im Punkt P(1/1) **definiert**. Sie ist der Grenzwert der Sekantensteigungen m_S, wenn *h* gegen Null strebt.

Beispiel:

Wir wollen nun einmal die Tangente an der Normalparabel $f(x) = x^2$ im Punkt P(−2/4) bestimmen.

Der "bewegliche" Punkt Q hat hier die folgenden Koordinaten: $Q(-2+h \,/\, (-2+h)^2)$. Wir setzen dann $P_1 = P(-2/4)$ und $P_2 = Q(-2+h \,/\, (-2+h)^2)$, so daß sich die folgende Rechnung ergibt:

a) Sekantensteigung:

$$m_S(-2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} = \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{h \cdot (-4 + h)}{h} = -4 + h$$

b) Tangentensteigung:

$$m_t(-2) = \lim_{h \to 0} (-4 + h) = -4.$$

Der Graph von f hat an der Stelle $x = -4$ eine Tangente mit der Steigung $m_t = -4$.

Übungen:

1. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie in den gegebenen Punkten die Steigung der Tangente:

   a) $f(x) = x^2$, P(3/9) b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, P(2/2) $f(x) = x^2 - 4$, P(− 3/5)

2. Bestimmem Sie die folgenden Grenzwerte, indem Sie "h" gegen Null streben lassen:

   a) $\lim\limits_{h \to 0} (1 - 2h)$ b) $\lim\limits_{h \to 0} (\frac{1}{2} + h^2)$ c) $\lim\limits_{h \to 0} (3h^2 - 2)$

   d) $\lim\limits_{h \to 0} (\frac{1}{3}h^2 + \frac{5}{2} - h)$ e) $\lim\limits_{h \to 0} (3 - 2h)^2$ f) $\lim\limits_{h \to 0} (\frac{2}{3-h})$

Es liegt nun nahe, den im Beispiel beschrittenen Weg zur Bestimmung der Tangentensteigung zu verallgemeinern. Dazu lösen wir uns von der speziellen Funktion $f(x) = x^2$ samt des Punktes P(1/1) und betrachten ganz allgemein eine beliebige Funktion f sowie einen beliebigen Punkt $P(x/f(x))$ auf dem zugehörigen Funktionsgraphen $\mathbb{G}_f$.

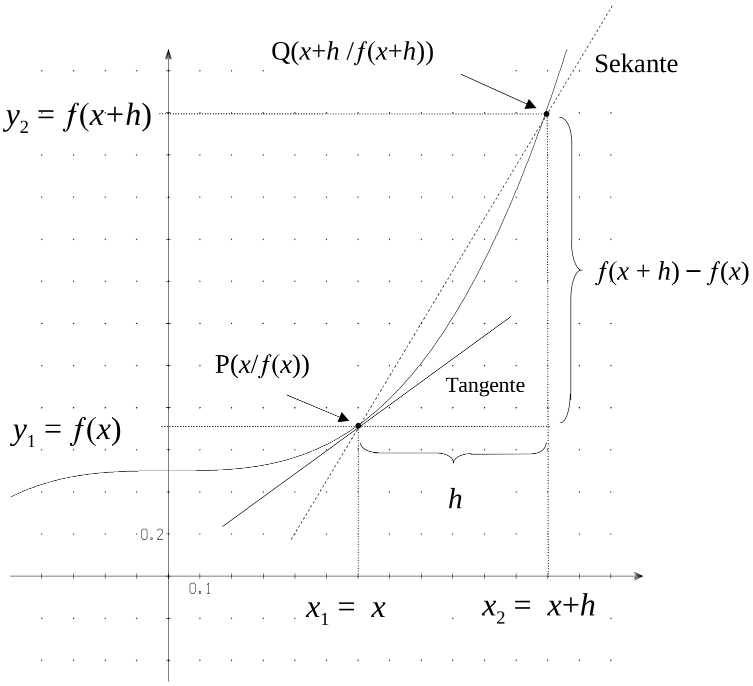
3. Allgemeine Zusammenfassung: Sekantensteigung und Tangentensteigung:

Gegeben sei eine reelle Funktion f und ein beliebiger Punkt $P(x\,/f(x))$ des Funktionsgraphen $\mathbb{G}_f$. Ferner ist mit einem beliebigen $h \neq 0$ ein zweiter Punkt $Q(x+h\,/f(x+h))$ und damit eine Sekante durch P und Q (Sekante) gegeben. Wir haben dann zwei Punkte m,it den folgenden Zuordnungen:

$x_1 = x$ $y_1 = f(x)$

$x_2 = x + h$ $y_2 = f(x + h)$

Die Steigung der Sekante bezeichnen wir mit m_S. Dazu betrachten wir die folgende Zeichnung:



Tangentensteigung:

$$m_t(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$m_t(x)$ ist der **Grenzwert** des Differenzenquotienten.

Die Steigung der Tangente: $m_t(x)$ ist also *abhängig* von der Funktion f und der Stelle $x \in \mathbb{D}_f$. Um diese Abhängigkeit der Tangentensteigung von f und x auszudrücken, schreiben wir anstelle von $m_t(x)$ auch: $f'(x)$ [lies: f-Strich-von-x]. Die Tangentensteigung $f'(x)$ heißt die *1. Ableitung von f an der Stelle x*. Wir können demnach festhalten:

Definition:

Wenn f eine Funktion ist und $P(x/f(x))$ ein beliebiger Punkt des Funktionsgraphen $\mathbb{G}_f$, dann wird für den Punkt P folgendes definiert:

Der Graph $\mathbb{G}_f$ hat im Punkt $P(x/f(x))$ genau dann eine *Tangente* mit der Steigung $f'(x)$, wenn die folgende Beziehung gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$f'(x)$ ist also der *Grenzwert* der Sekantensteigungen $m_S(x)$, wenn h gegen Null strebt.

Bemerkungen:

1. Das Symbol $f'(x)$ ist bloß eine andere Schreibweise für die Steigung der Tangente: $m_t(x)$. Es gilt also: $f'(x) = m_t(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

2. Wir verdeutlichen noch einmal die Bedeutung der ersten Ableitung $f'(x)$:

Die 1. Ableitung $f'(x)$ gibt allgemein die Steigung der Tangente des Funktinsgraphen $\mathbb{G}_f$ an der Stelle x an!

Beispiele:

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$.

   Gesucht ist die Steigung der Tangente von $\mathbb{G}_f$ an der Stelle $x_0 = -2$. Da $f(-2) = 1$ ist, geht $\mathbb{G}_f$. durch den Punkt P(−2/1)

   a) Sekantensteigung: $h \neq 0$:

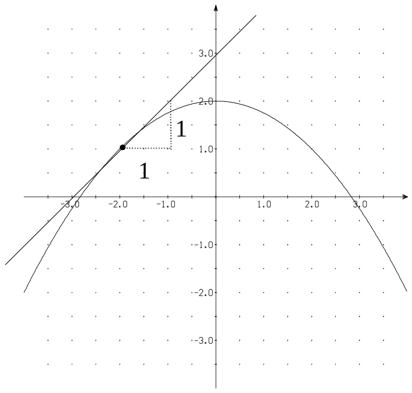
$$m_s(-2) = \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{-\frac{1}{4}(-2+h)^2 + 2 - 1}{h}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}(4-4h+h^2) + 2 - 1}{h} = \frac{-1+h-\frac{1}{4}h^2 + 2 - 1}{h}$$

$$= \frac{h-\frac{1}{4}h^2}{h} = \frac{h(1-\frac{1}{4}h)}{h} = 1 - \frac{1}{4}h$$

   b) Tangentensteigung:

$$m_t(-2) = \lim_{h\to 0}(1 - \tfrac{1}{4}h) = 1, \text{ also } f'(-2) = 1$$



$f'(-2) = 1$

2. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3$

   Gesucht ist die Steigung der Tangente von $\mathbb{G}_f$ an der Stelle $x_0 = 1$. Da $f(1) = 1$ ist, geht $\mathbb{G}_f$. durch den Punkt P(1/1)

   a) Sekantensteigung: $h \neq 0$:

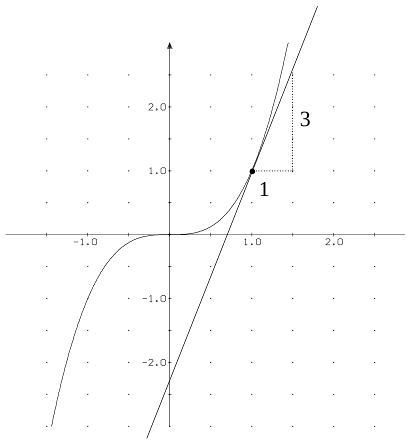
$$m_s(1) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$$

$$= \frac{1+3h+3h^2+h^3+1-1}{h} = \frac{3h+3h^2+h^3}{h}$$

$$= \frac{h\,(3+3h+h^2)}{h} = 3 + 3h + h^2$$

   b) Tangentensteigung:

$$m_t(1) = \lim_{h\to 0}(3 + 3h + h^2) = 3, \text{ also } f'(1) = 3$$



$f'(1) = 3$

3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Gesucht ist die Steigung der Tangente von $\mathbb{G}_f$ an der Stelle $x_0 = 2$. Da $f(2) = \frac{1}{2}$ ist, geht $\mathbb{G}_f$ durch den Punkt $P(2/\frac{1}{2})$

a) Sekantensteigung: $h \neq 0$:

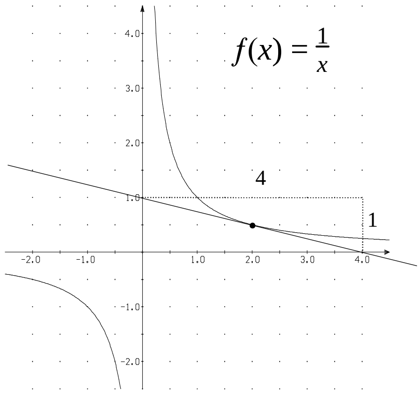
$$m_s(2) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \frac{\frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h} = \frac{-1}{2(h+2)} = \frac{-1}{2h+4}$$

b) Tangentensteigung:

$$m_t(2) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{2h+4}\right) = -\frac{1}{4}, \text{ also } f'(2) = -\frac{1}{4}$$



$f'(2) = -\frac{1}{4}$

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$
Gesucht ist die Steigung der Tangente von $\mathbb{G}_f$ an der Stelle $x = 2$. Da $f(2) = \sqrt{2}$ ist, geht $\mathbb{G}_f$ durch den Punkt $P(2/\sqrt{2})$

a) Sekantensteigung: $h \neq 0$:

$$m_s(2) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$$

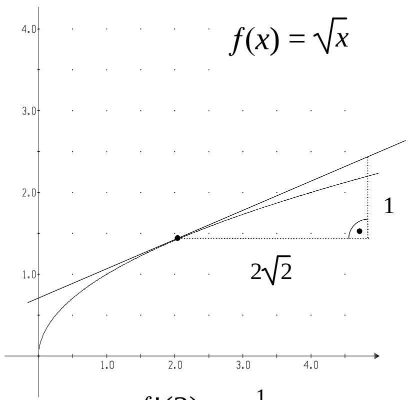
$$= \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

b) Tangentensteigung:

$$m_t(2) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

also $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$



$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Übungen:

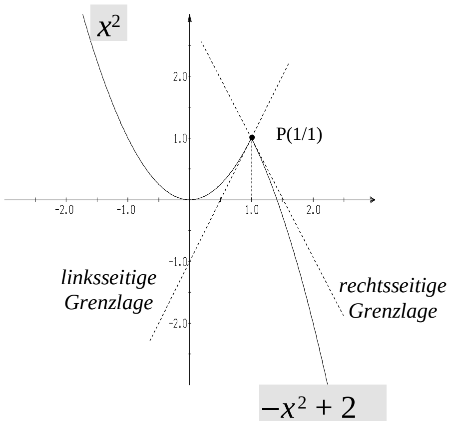
Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition die Steigung der Tangente in dem angegebenen Punkt.

a) $f(x) = -x^2 + 9$,	$P(3/0)$	d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$,	$P(2/\frac{1}{4})$
b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$,	$P(2/-1)$	e) $f(x) = x^3$,	$P_1(-1/-1)$
c) $f(x) = -x^2 + 2x$,	$P(-1/-3)$	f) $f(x) = -2\cdot\sqrt{x}$,	$P(1/-2)$

4. Differenzierbarkeit (Ableitbarkeit)

Wir wollen nun eine etwas kompliziertere Funktion im Hinblick auf die Bestimmung einer Tangente untersuchen. Wir betrachten eine Funktion, die aus zwei quadratischen Funktionen zusammengesetzt ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1, \text{ also: } f(1) = 1 \\ -x^2 + 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$



Die Frage ist jetzt, ob wir in dem Knickpunkt P(1/1) auch eine Tangente genau bestimmen können. Dazu müssen wir nach Definition der Tangentensteigung den Grenzwert des Differenzenquotienten:

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ berechnen. Da die Funktion f aber für h > 0 einen anderen Term hat als für h < 0, müssen wir zur Bestimmung des Grenzwertes eine Fallunterscheidung machen:

a) Für $h < 0$ erhalten wir **links** von der Stelle $x = 1$:

α) Sekantensteigungen:

$$m_S(1) = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{1+h-1} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h\,(2 + h)}{h} = 2 + h$$

β) Grenzwertbestimmung: da $h < 0$ ist, erhalten wir den *linksseitigen* Grenzwert:

$$\text{L}-\lim_{h \to 0} (2 + h) = 2$$

b) Für $h > 0$ erhalten wir **rechts** von der Stelle $x = 1$:

α) Sekantensteigungen:

$$m_S(1) = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1+h)^2 + 2 - 1}{1+h-1} = \frac{-1 - 2h - h^2 + 2 - 1}{h}$$

$$= \frac{-2h - h^2}{h} = \frac{h\,(-2 - h)}{h} = -2 - h$$

β) Grenzwertbestimmung: da $h > 0$ ist, erhalten wir den *rechtsseitigen* Grenzwert:

$$\text{R}-\lim_{h \to 0} (-2 - h) = -2$$

An der Stelle $x = 1$ liegen also zwei *verschiedene* Grenzwerte der Sekantensteigungen vor, je nachdem die Sekanten links oder rechts von $x = 1$ liegen. Insofern können wir sagen, daß die Funktion f an der Stelle $x = 1$ keine eindeutig definierte Tangente besitzt. In einem solchen Falle heißt die Funktion f an der Stelle $x = 1$ *nicht ableitbar* oder *nicht differenzierbar*. Wir können aufgrund dieser Erkenntnis also präziser definieren:

Definition (Differenzierbarkeit)
Eine Funktion f heißt an der Stelle x genau dann **differenzierbar** oder **ableitbar**, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eindeutig existiert, sonst heißt f *nicht* differenzierbar.

Bemerkung:

Im Falle der Differenzierbarkeit müssen insbesondere der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert desDifferenzenquotienten übereinstimmen.

Übungen:

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit an der vorgegebenen Stelle:

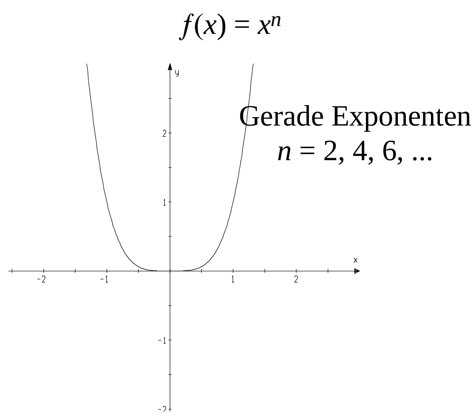
1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1, \\ -x^2 + 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

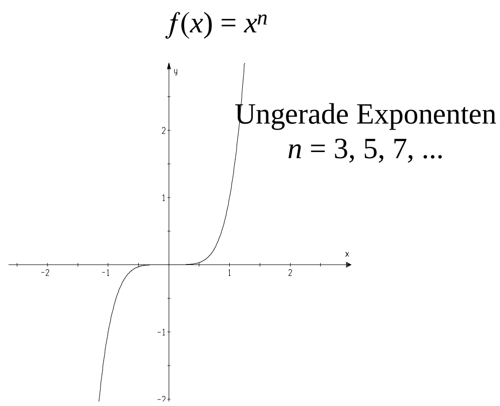
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1, \text{ also insbesondere: } f(1) = 1 \\ -x^2 + 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

5. Ableitungsformeln

Nachdem wir anhand der vorliegenden Beispiele bei einzelnen Funktionen an ganz konkreten Stellen jeweils die Steigung der Tangente bestimmt haben, wollen wir nun die Ergebnisse verallgemeinern. Wir wollen Formeln entwickeln, mit denen wir dann bei einer beliebigen Funktion $f(x)$ die Steigung der Tangente an einer beliebigen Stelle x, also $f'(x)$ bestimmen können.

5.1 Die Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit positiven Exponenten $n \in \mathbb{N}$





Bei der allgemeinen Bestimmung der Tangente beginnen wir mit der quadratischen Parabel $f(x) = x^2$ und entwickeln eine Formel zur Bestimmung der Steigung der Tangente $f'(x)$ an irgend einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$:

1. Die Funktion $f(x) = x^2$, P(x/$f(x)$) und Q($x+h$, $f(x+h)$

   a) Der Differenzenquotient:

$$m_S(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$
$$= \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$$

   b) Der Grenzwert: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} (2x + h) = 2x$

Dies bedeutet, daß bezüglich der quadratischen Parabel $f(x) = x^2$ die Steigung der Tangente an jeder beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$ durch die Formel $f'(x) = 2x$ bestimmt ist.
So ist z.B. die Steigung der Tangente der Normalparabel an der Stelle x = – 3 mit der Rechnung $f'(-3) = 2\cdot(-3) = -6$ gegeben. Nun werden wir eine Formel für die Tangentensteigungen der höheren Potenzfunktionen herleiten.

2. Die Funktion $f(x) = x^3$, P(x/$f(x)$) und Q($x+h$, $f(x+h)$

   a) Der Differenzenquotient:

$$m_S(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$
$$= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^2}{h} = \frac{h\,(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

   b) Der Grenzwert: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} (3x^2 + \underset{\downarrow\atop 0}{3hx} + \underset{\downarrow\atop 0}{h^2}) = 3x^2$

3. Die Funktion $f(x) = x^4$, P(x/$f(x)$) und Q($x+h$, $f(x+h)$

   a) Der Differenzenquotient:

$$m_S(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$
$$= \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h}$$
$$= 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^2$$

   b) Der Grenzwert: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} (4x^3 + \underset{\downarrow\atop 0}{6x^2h} + \underset{\downarrow\atop 0}{4xh^2} + \underset{\downarrow\atop 0}{h^3}) = 4x^3$

Wir haben damit also die folgenden Ableitungsformeln nachgewiesen:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2\cdot x \\ f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3\cdot x^2 \\ f(x) = x^4 \;\Rightarrow\; f'(x) = 4\cdot x^3 \end{array}}$$

Es ist nun naheliegend, für alle Exponenten $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel anzunehmen.

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Diese Formel werden wir später noch allgemeiner beweisen können.

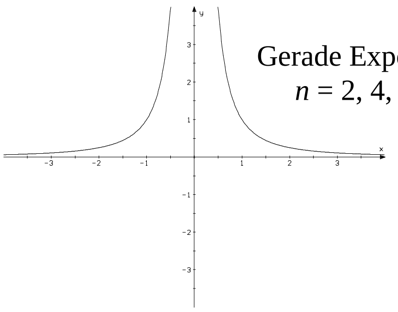
Übungen:

Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen und erklären Sie Ihre Ergebnisse:

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = x^6$ c) $f(x) = x^9$ d) $f(x) = x^{28}$ e) $f(x) = x^{35}$

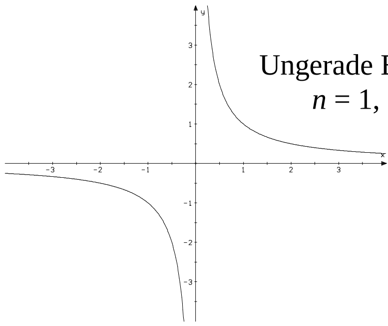
5.2 Die Potenzfunktionen mit negativen Exponenten: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ und $n \in \mathbb{N}$

$f(x) = \frac{1}{x^n}$



Gerade Exponenten
$n = 2, 4, 6, ...$

$f(x) = \frac{1}{x^n}$



Ungerade Exponenten
$n = 1, 3, 5, ...$

1. Wir beginnen mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ und bestimmen die Ableitung $f'(x)$:

   a) Differenzenquotient:

$$m_S(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x}}{h} = \frac{x-(x+h)}{h\cdot(x+h)\cdot x} = \frac{-h}{h(x+h)x} = \frac{-1}{x^2+hx}$$

   b) Grenzwert des Differenzenquotienten: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \left(\frac{-1}{x^2+hx}\right) = -\frac{1}{x^2}$

   Damit ist bezüglich der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die Steigung der Tangente an jeder beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$ durch die Formel $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ bestimmt ist, d.h. die Steigung der Tangente ist stets negativ, wie dies die Zeichnung oben links auch verdeutlicht.

   Beispiel:

   Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist die Steigung der Tangente an der Stelle $x = -2$ dann:

   $f'(-2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$ gegeben.

2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) Differenzenquotient:

$$m_S(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \frac{x^2 - (x+h)^2}{h \cdot x^2 (x+h)^2}$$

$$= \frac{-2xh - h^2}{h \cdot x^2 (x^2 + 2xh + h^2)} = \frac{-2x - h}{x^4 + 2 \cdot x^3 h + x^2 h^2}$$

b) Grenzwert des Differenzenquotienten: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{-2x - h}{x^4 + 2 \cdot x^3 h + x^2 h^2} \right) = -\frac{2}{x^3}$

Wir haben also auch hier die folgenden Formeln gefunden:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Es ist naheliegend, für alle Exponenten n $\in \mathbb{N}$ die folgende Formel anzunehmen:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \Rightarrow f'(x) = -n \cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Auch diese Formel werden wir später noch allgemein beweisen.

5.3 Die Wurzelfunktion: $f(x) = \sqrt{x}$

a) Differenzenquotient:

$$m_S(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad \text{(binomisch erweitert!)}$$

$$= \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

2. Grenzwert des Differenzenquotienten:

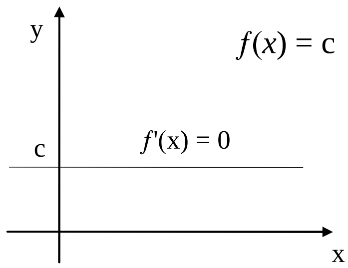
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Also haben wir die Formel gefunden:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

5.4 Die konstante Funktion $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$;

(Der Funktionsgraph ist eine Parallele zur x–Achse)



a) Differenzenquotient: $m_S(x) = \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0$

b) Grenzwert des Differenzenquotienten:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (0) = 0$

Die Steigung der Tangente ist in jedem Punkt gleich 0; d.h. sie ist mit der Geraden von $f(x) = c$ identisch.

Wir können nun eine Tabelle der bisherigen Ableitungsformeln aufstellen:

Ableitungstabelle

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
c (konstant)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2}{x^3}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Bemerkung:

Wenn man die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^n}$ als Potenzfunktion mit negativem Exponenten schreibt:

$f(x) = x^{-n}$, dann kan man die Regel von den positiven Exponenten übernehmen. Es ist dann: $f'(x) = -n\,x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$. Dazu ein Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}$.

Übungen:

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen $f(x)$ und den angegebenen Stellen $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$ an und interpretieren Sie die Bedeutung von $f'(x)$ anhand einer Skizze:

a) $f(x) = x^4$; $f'(2) = ?$

b) $f(x) = x^5$; $f'(0) = ?$

c) $f(x) = x^3$; $f'(-\frac{2}{5}) = ?$

d) $f(x) = 3$; $f'(5) = ?$

e) $f(x) = x^{-3}$; $f'(2) = ?$

f) $f(x) = x^{-4}$; $f'(-1) = ?$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$; $f'(-3) = ?$

h) $f(x) = \frac{1}{x^4}$; $f'(-2) = ?$

i) $f(x) = \sqrt{x}$; $f'(3) = ?$

6. Ableitungsregeln

Neben den oben entwickelten Ableitungsformeln für die einzelnen Funktionen müssen wir noch Regeln entwickeln; um die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion zu bestimmen. Kann man z.B. bei der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ als Ableitung einfach die Form: $f'(x) = 3x^2 + 2x$ angeben? Ist also die Ableitung einer Summe gleich der Summe der Ableitungen? Wir wollen die Richtigkeit dieses Satzes und eines weiteren nun beweisen; damit das Ableiten von Funktionen künftig einfacher wird.

6.1 Die Summenregel:

Behauptung:

Wenn $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ist und die beiden Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die Ableitungen $f_1'(x)$ und $f_2'(x)$ haben; dann gilt für die Ableitung der Summe die Beziehung:

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$$

Beweis:

a) Differenzenquotient: $m_S(x) = \dfrac{[f_1(x+h) + f_2(x+h)] - [f_1(x) + f_2(x)]}{h}$

$$= \frac{[f_1(x+h) - f_1(x)] + [f_2(x+h) - f_2(x)]}{h} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}$$

b) Grenzwert: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \Big[\underbrace{\dfrac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}}_{f_1'(x)} + \underbrace{\dfrac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}}_{f_2'(x)} \Big]$

$$= f_1'(x) + f_2'(x)$$

Damit haben wir bewiesen; daß die Ableitung einer Summe in der Tat die Summe der einzelnen Ableitungen ist. Ganz analog gilt das natürlich auch für die Differenzfunktion: $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$; sodaß wir insgesamt zusammenfassen können:

$$\boxed{f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x)}$$

Die Ableitung einer Summe (Differenz) ist gleich der Summe (Differenz) der Einzelableitungen.

Beispiele:

a) $f(x) = x^4 - x^2 - x + 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 2x - 1$
b) $f(x) = x^2 - 3 + x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 3x^2$
c) $f(x) = -x^6 + x - x^2 + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -6x^5 + 1 - 2x$
d) $f(x) = x^5 - x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 + 2x^{-3}$

Übungen:

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen die Ableitung $f'(x)$:

a) $f(x) = -x^5 + x^3 - 2$ b) $f(x) = -x^2 - x + x^4$ c) $f(x) = 1 - x$
d) $f(x) = x^3 - x^{-5}$ e) $f(x) = x^4 - x - 2^3$ f) $f(x) = x^{-5} - x + x^5$
d) $f(x) = x^1 - x^{-1}$ e) $f(x) = x^0 - x - 2^{-5}$ f) $f(x) = x^{-2} - x^2 + x^6$

6.2 Die Regel vom konstanten Faktor:

Die Frage ist nun; wie sich bei der Ableitung ein konstanter Faktor vor der Funktion auswirkt. Wir kennen also die Ableitung der Funktion $g(x) = x^3$. Aber wie lautet z.B. die Ableitungsfunktion der mit 5 multiplizierten Funktion $f(x) = 5\cdot g(x) \;=\; 5\cdot x^3$?

Behauptung:

Wenn g(x) eine differenzierbare Funktion ist mit der Ableitung g'(x) und $f(x) = a\cdot g(x)$ eine mit dem konstanten Faktor $a \in \mathbb{R}$ multiplizierte Funktion ist; dann gilt für die Ableitung: $f'(x) = a\cdot g'(x)$; d.h. bei der Ableitung bleibt der Faktor a unverändert konstant.

Beweis:

a) Differenzenquotient: $m_S(x) = \dfrac{a\cdot g(x+h) - a\cdot g(x)}{h} = \dfrac{a\cdot[g(x+h) - g(x)]}{h} = a\,\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

b) Grenzwert: $f'(x) = \lim\limits_{h\to0}\left(\underset{\substack{\downarrow\\ a}}{a}\;\underset{\cdot}{}\;\underbrace{\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow\\ g'(x)}}\right) = a\cdot g'(x)$

Damit können wir eine zweite wichtige Regel für die Ableitung festhalten:

$$\boxed{f(x) = a\cdot g(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = a\cdot g'(x)}$$

Beispiele:

a) $f(x) = 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 5 \;\Rightarrow\; f'(x) = 12x^3 - 3x - \frac{1}{4}$

b) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; f'(x) = 10x - \frac{3}{2}x^2$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2x - 3 \;\Rightarrow\; f'(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 2$

d) $f(x) = 3x^7 - \dfrac{5}{x^3} - 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 21x^6 + \dfrac{15}{x^4}$

e) $f(x) = \dfrac{15}{x^4} - 3x^3 + \frac{1}{4}\sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = -\dfrac{60}{x^5} - 9x^2 + \dfrac{1}{8\sqrt{x}}$

Übungen:

1. Bestimmen Sie Ableitung f'(x) der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^5 - x^4$ b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}\cdot x$

c) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - x + \dfrac{1}{4}$ d) $f(x) = -\frac{2}{7}x^7 + 2\cdot x^5 - 1$

e) $f(x) = 2x^2 - 4x^{-3} + 3$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2x^2}$

g) $f(x) = a\,x^5$ mit $a \in \mathbb{R}$ h) $f(x) = a\,x^{-5} + b\,x^2$ mit $a; b \in \mathbb{R}$

i) $f(x) = a^3\,x$ mit $a \in \mathbb{R}$ j) $f(x) = a\,x^{-5} - b\sqrt{x} - c^2$ mit $a; b \in \mathbb{R}$

2. Gegeben sei eine Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 4$

a) Wie groß ist die Steigung der Tangente an den Stellen $x_1 = -4$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 0$?

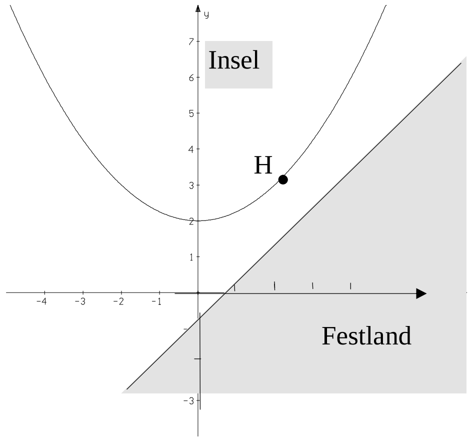
b) An welcher Stelle x hat $\mathbb{G}_f$ eine Tangente mit der Steigung $m_1 = -1$ und $m_2 = \frac{3}{2}$?

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der 1. Ableitung $f'(x)$ den Scheitelpunkt $S(x_S\,/\,y_S)$ der Parabel $\mathbb{G}_f$ und zeichnen Sie den Graphen $\mathbb{G}_f$ in ein Koordinatensystem.

3. Eine Anwendungsaufgabe:

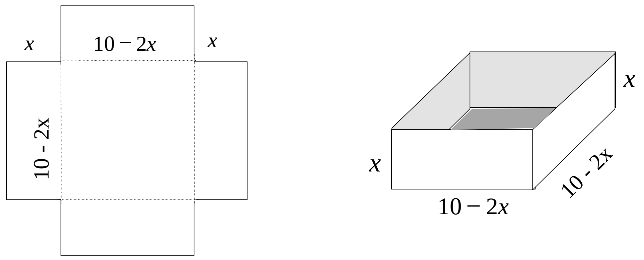
In der nebenstehenden Skizze ist eine parbelförmige Insel dargestellt; die den Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$ hat und dem geradenförmigen Festlandufer mit dem Term: $g(x) = x - 1$ gegenüberliegt.

Auf der Insel soll nun für einen Fährbetrieb ein Hafen gebaut werden. In welchem Punkt $H(x/y)$ der Parabel muß der Hafen liegen; damit die Strecke zum Festland am kürzesten ist?



Ein Maximierungsproblem:

Aus einem quadratischen Stück Eisenblech von $1\text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2$ Flächengröße sollen an den vier Ecken kleine Quadrate $Q = x^2$ ausgeschnitten werden; sodaß nach folgender Skizze ein Ölbehälter entsteht:



Die Frage ist nun; wie groß der Abschnitt x gewählt werden muß; damit das Volumen des Ölbehälters unter allen Möglichkeiten am größten ist.
Zur Lösung dieser Aufgabe brauchen wir zunächst eine allgemeine Formel für das Volumen dieses quaderförmigen Ölbehälters. Wir wissen; daß die Grundfläche quadratisch ist und demnach die Größe $G = (10 - 2x)^2$ haben muß. Da die Höhe gleich dem Abschnitt x ist; gilt für das Volumen die Formel:

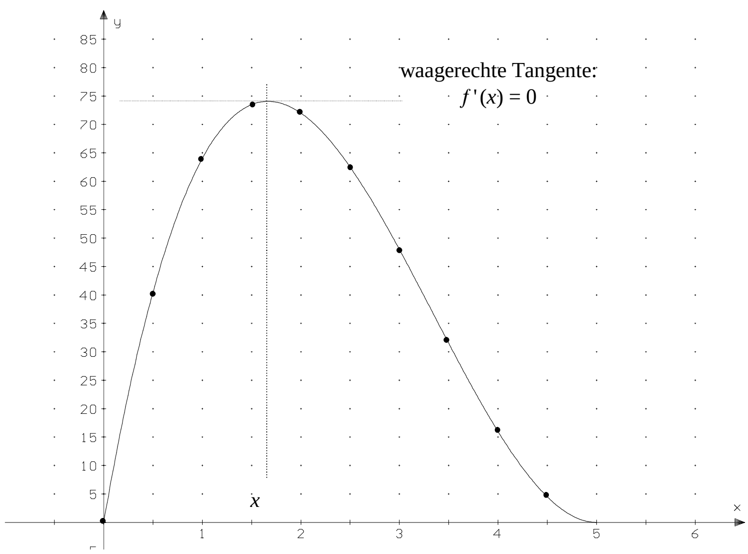
$$V(x) = x \cdot (10 - 2x)^2\ [\text{dm}^3]$$

Diese Formel gibt also für den Abschnitt x direkt das Volumen des Quaders an. Es handelt sich also um eine *Funktion*; durch die jedem Abschnitt x das entsprechende Volumen $V(x)$ des Behälters zugeordnet wird. Der Wert für x liegt dabei zwischen 0 und 5 dm; weil es erstens keine negativen Abschnitte gibt und zweitens bei einem Wert von $x = 5$ dm das Blech in vier Teile geschnitten wird und praktisch kein Behälter mehr möglich ist.
Wenn wir z.B. $x = 1$ dm (= 10 cm) wählen; dann können wir mit der Volumenfunktion das Volumen einfach berechnen: $V(1) = 1 \cdot (10 - 2)^2 = 1 \cdot 8^2 = 64$. Dies bedeutet; daß bei $x = 1$dm der Ölbehälter ein Volumen von $V = 64\ \text{dm}^3$ hat. Mit der bekannten Entsprechung $1\ \text{dm}^3 = 1$ Liter Flüssigkeiterhalten wir also das Volumen von 64 Litern. Wir wollen nun einmal mit Hilfe des Taschenrechners eine Wertetabelle für die Funktion $V(x)$ aufstellen und anschließend den Funktionsgraphen zeichnen:

Wertetabelle

x	V(x)
0	0;0
0;5	40;5
1	64;0
1;5	73;5
2	72;0
2;5	62;5
3	48;0
3;5	31;5
4	16;0
4;5	4;5
5	0;0

Graph



Wir sehen; daß das Volumen genau an der Stelle am größten ist; an der der Funktionsgraph von V(x) eine waagerechte Tangente hat. Dies bedeutet aber;daß dort der Wert der ersten Ableitung von V(x) gleich Null ist: V'(x) = 0.

Da nun $V(x) = x\,(10 - 2x)^2 = x\cdot(100 - 40x + 4x^2) = 100x - 40x^2 + 4x^3$; so gilt für die Ableitung die Formel: $V'(x) = 100 - 80x + 12x^2$. Wir müssen zur Lösung des Problems also die folgende Gleichung lösen:

$$V'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 12x^2 - 80x + 100 = 0 \quad |:12 \qquad \text{(Normieren der quadratischen Gleichung)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & x^2 - \tfrac{20}{3}x + \tfrac{25}{3} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x = \tfrac{10}{3} \pm \sqrt{\tfrac{100}{9} - \tfrac{25}{3}}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(Die pq-Formel: } x = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q} \text{ anwenden)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{10}{3} \pm \sqrt{\tfrac{100}{9} - \tfrac{75}{9}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{10}{3} \pm \tfrac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5 \;\vee\; x = \tfrac{5}{3}$$

$$\mathbb{L} = \{\, 5;\ \tfrac{5}{3} \,\}$$

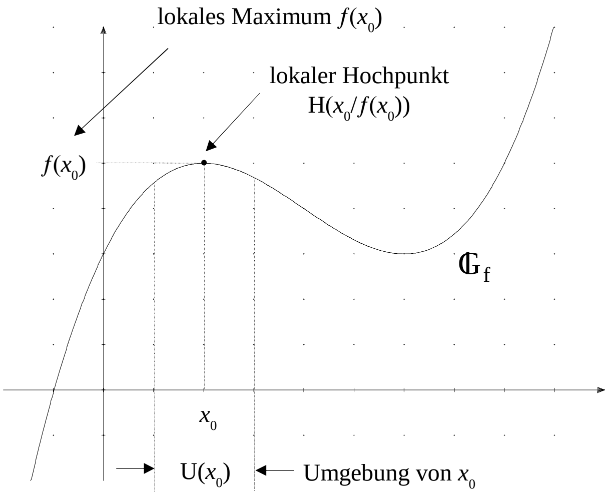
Das Ergebnis bedeutet; daß wir an der Stellen $x = 5$ dm und $x = \frac{5}{3}$ dm ≈ 1;67 dm jeweils eine waagerechte Tangente vorliegen haben. Der Zeichnung entnehmen wir; daß unser gesuchter Wert $x = \frac{5}{3}$ sein muß. Für diesen Wert x ist das Volumen V(x) am größten von allen Werten für $0 \le x \le 5$. Mit Hilfe der Formel $V(x) = x\cdot\,(10 - 2x)^2$ können wir dieses größte Volumen auch berechnen; denn es gilt:

$$V(\tfrac{5}{3}) = \tfrac{5}{3}(10 - \tfrac{10}{3})^2 = \tfrac{2000}{27} \approx 74{;}1 \text{ dm}^3.$$

5. Lokale Extrema

5.1 Lokales Maximum einer Funktion f

Wir betrachten einmal den Graphen der folgenden Funktion f:



Wir sehen; daß an der Stelle x_0 der Funktionswert $f(x_0)$ größer ist als alle anderen umgebenden Funktionswerte $f(x)$. Man nennt diesen Funktionswert $f(x_0)$; der innerhalb einer Umgebung von x_0 der größte ist; auch ein *lokales Maximum* der Funktion f. Wir definieren nun diesen Begriff präzise:

*__Bemerkung:__

Eine *Umgebung* $U(x_0)$ ist ein offenes Intervall]a;b[mit der Eigenschaft: $x_0 \in$]a;b[

Wir können nun definieren; was wir unter einem lokalen Maximum verstehen:

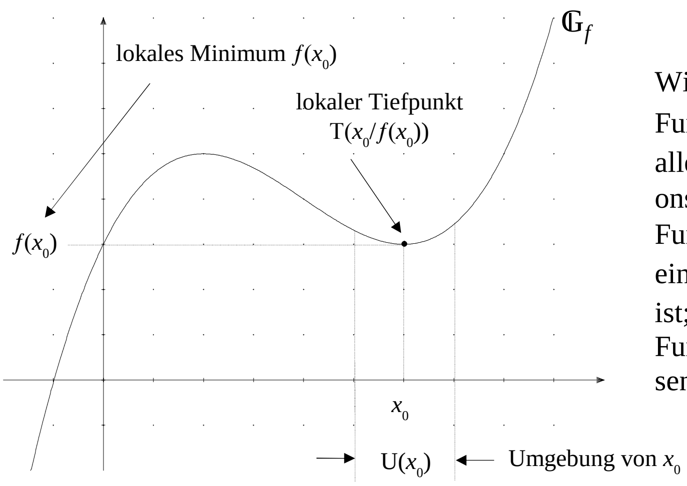
Definition 5.1

Der *Funktionswert* $f(x_0)$ einer Funktion f heißt genau dann ein "*lokales Maximum von f* "; wenn es an der Stelle x_0 eine Umgebung $U(x_0)$ gibt; sodaß für alle $x \in U(x_0)$ die Ungleichung gilt:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Der entsprechende Punkt $H(x_0/f(x_0))$ heißt dann "*lokaler Hochpunkt*" des Graphen $\mathbb{G}_f$

5.2 Lokales Minimum einer Funktion f



Wir sehen; daß an der Stelle x_0 der Funktionswert $f(x_0)$ kleiner ist als alle anderen umgebenden Funktionswerte $f(x)$. Man nennt diesen Funktionswert $f(x_0)$; der innerhalb einer Umgebung von x_0 der kleinste ist; auch ein *lokales Minimum* der Funktion f. Wir definieren nun diesen Begriff präzise:

Definition 5.2
Der Funktionswert $f(x_0)$ einer Funktion f heißt genau dann ein "*lokales Minimum von f* "; wenn es an der Stelle x_0 eine Umgebung $U(x_0)$ gibt; sodaß für alle $x \in U(x_0)$ gilt:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Der entsprechende Punkt $T(x_0/f(x_0))$ heißt dann "*lokaler Tiefpunkt*" des Graphen $\mathbb{G}_f$

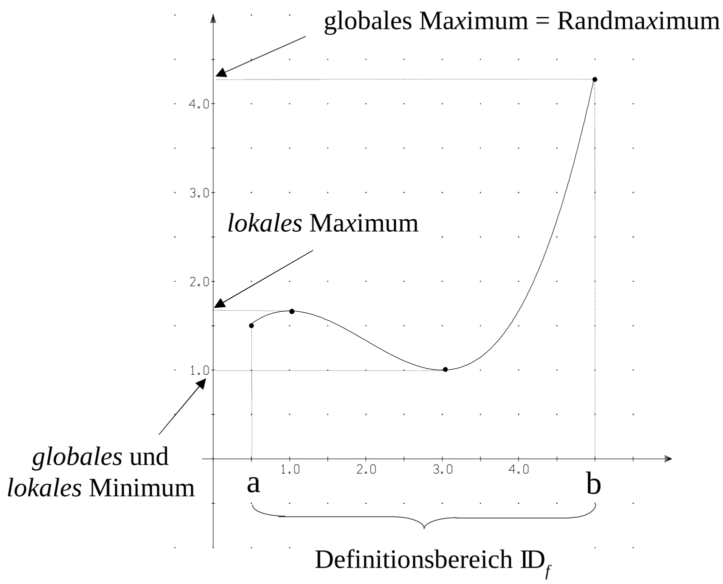
Bemerkung:

Wir müssen also unterscheiden zwischen dem lokalen *Maximum (Minimum)* und dem lokalen *Hochpunkt (Tiefpunkt)*. Das Maximum (Minimum) ist ein *Funktionswert*; während der Hochpunkt (Tiefpunkt) ein *Punkt* ist; der *zwei* Koordinaten hat: erstens die Stelle x_0 des Maximums (Minimums) als x-Koordinate und zweitens das Maximum (Minimum) $f(x_0)$ als y-Koordinate des Punktes.

Der Oberbegriff zu "lokales Maximum" und "lokales Minimum" heißt *lokales Extremum*. Die entsprechenden Punkte heißen *lokale Extrempunkte.*

6. Globale Extrema:

Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ insgesamt den größten Funktionswert $f(x_0)$ *aller* anderen Funktionswerte besitzt; wenn also für *alle* $x \in \mathbb{D}_f$ die $f(x_0) \geq f(x)$ gilt; dann heißt $f(x_0)$ das *globale* Maximum der Funktion f auf $\mathbb{D}_f$.



Entsprechend der Definition des globalen Maximums heißt $f(x_0)$ das *globale Minimum* der Funktion f auf $\mathbb{D}_f$, wenn für *alle* $x \in \mathbb{D}_f$ die Ungleichung $f(x_0) \leq f(x)$ gilt.

Der Oberbegriff zu "globales Maximum" und "globales Minimum" heißt globales Extremum. Liegt das globale Extremum auf dem Rand des Definitionsbereiches; so heißt es Randextremum:

7. Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:

Satz (*notwendige Bedingung für lokale Extrema*)

Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0

1. ein lokales Extremum hat und
2. die Ableitung $f'(x_0)$ existiert;

} ***dann*** gilt: $f'(x_0) = 0$

Für ein lokales Extremum an der Stelle x_0 ist es *notwendig*; daß $f'(x_0) = 0$ gilt!

☞ **Wichtige Bemerkung:**

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht! Dazu ein Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ zwar eine waagerechte Tangente ($f'(0) = 0$); aber dort liegt kein lokales Extremum vor.

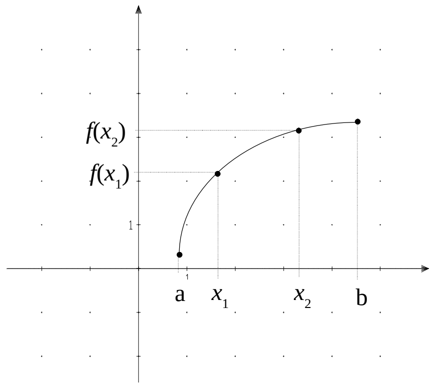
8. Die Definition der Monotonie:

Nach den bisherigen Definitionen wurde klar; daß bei einem lokalen Maximim der Graph einer Funktion f vorher steigt und nachher fällt; bei einem lokalen Minimum ist es umgekehrt; vorher fällt der Graph und nachher steigt er. Wir wollen dieses "Steigen" und "Fallen" nun genauer definieren:

8.1 streng monoton steigend

Gegeben sei eine Funktion f; die auf einem Intervall [a;b] definiert ist.
Wenn nun zu größer werdenden x -Werten die Funktionswerte $f(x)$ auch *größer* werden; so heißt die Funktion f auf [a;b] *streng monoton steigend*.

Wir definieren genau:

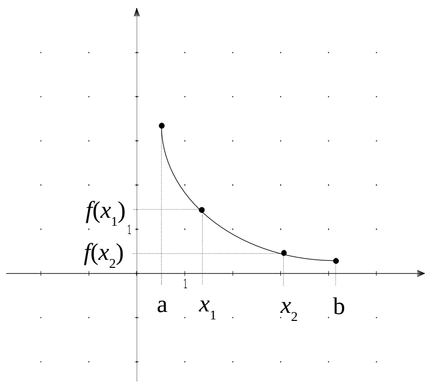


Definition 8.1

Die Funktion f heißt auf dem Intervall [a;b] **streng monoton steigend** genau dann; wenn für alle x_1 ; $x_2 \in$ [a;b] gilt: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

8.2 streng monoton fallend

Gegeben sei eine Funktion f; die auf einem Intervall [a;b] definiert ist.
Wenn nun zu größer werdenden x -Werten die Funktionswerte $f(x)$ *kleiner* werden; so heißt die Funktion f auf [a;b] *streng monoton fallend*.
Wir definieren genau:



Definition 8.2

Die Funktion f heißt auf dem Intervall [a;b] **streng monoton fallend** genau dann; wenn für alle x_1 ; $x_2 \in$ [a;b] gilt: $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$.

9. Das Verhältnis von Ableitung und Monotonie:

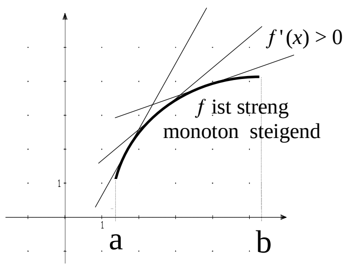
Die Frage; wie man von der Ableitung $f'(x)$ einer Funktion auf das Monotonieverhalten von $f(x)$ schließen kann; beantwortet der globale Monotoniesatz:

Satz: (globaler Monotoniesatz)

Gegeben sei eine Funktion f und das Intervall $[a;b] \subseteq \mathbb{D}_f$. Für alle $x \in]a;b[$ existiert die Ableitung $f'(x)$. Es gelten dann die folgenden Implikationen:

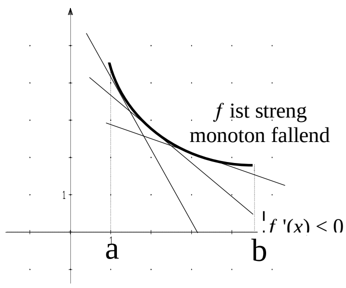
a) *Wenn* für alle $x \in]a;b[$ gilt: $\boldsymbol{f'(x) > 0}$; *dann* gilt:

f ist auf [a;b] streng monoton steigend.



b) *Wenn* für alle $x \in]a;b[$ gilt: $\boldsymbol{f'(x) < 0}$; *dann* gilt:

f ist auf [a;b] streng monoton fallend.



☞ **Wichtige Bemerkung:**

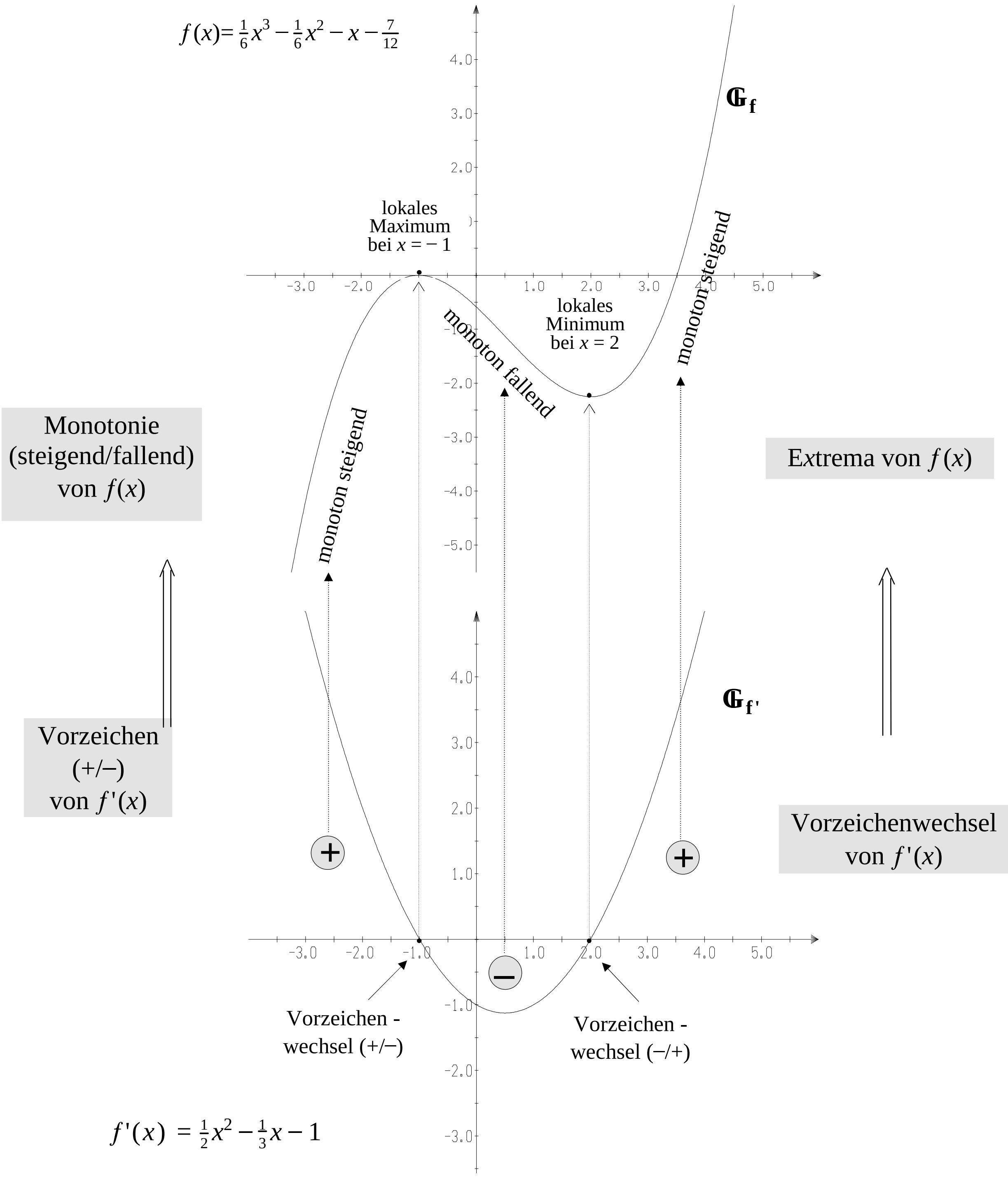
Die Umkehrung des Satzes gilt nicht!

Gegenbeispiele:

Zu (a) $f(x) = x^3$ mit einem beliebigen Intervall
Zu (b) $f(x) = -x^3$ mit beliebigem Intervall für.

Zeichnung zum globalen Monotoniesatz

Das Verhältnis zwischen dem Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$ und der Monotonie der Basisfunktion $f(x)$



10. Zwei hinreichende Bedingungen für lokale Extrema:

10.1 Erste hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums:

(*Das Vorzeichen-wechsel-kriterium der 1. Ableitung*)

Sei eine Funktion f und eine bestimmte Stelle $x_0 \in \mathbb{D}_f$ sowie die 1. Ableitung $f'(x)$ in einer Umgebung $U(x_0) \subseteq \mathbb{D}_f$ vorgegeben; dann gilt:

a) Wenn die 1. Ableitung f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von (+) nach (–) hat;	$\Rightarrow$	dann hat f bei x_0 ein lokales Maximum.
b) Wenn die 1. Ableitung f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von (−) nach (+) hat;	$\Rightarrow$	dann hat f bei x_0 ein lokales Minimum.

10.2. Zweite hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums:

(*Das Vorzeichenkriterium der 2. Ableitung*)

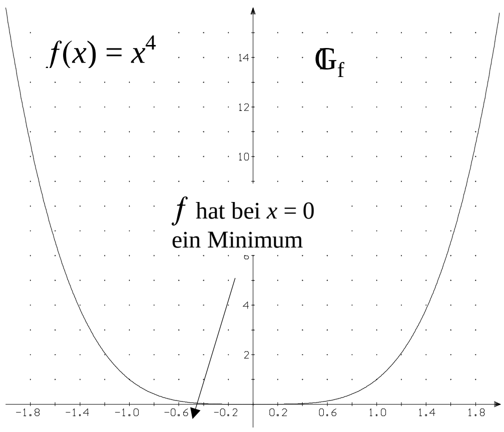
Sei eine Funktion f und eine bestimmte Stelle $x_0 \in \mathbb{D}_f$
sowie die 1. Ableitung $f'(x_0)$ und die 2. Ableitung $f''(x_0)$ vorgegeben; dann gilt:

a) $f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ hat bei x_0 ein lokales Maximum.

b) $f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) > 0 \Rightarrow \quad f$ hat bei x_0 ein lokales Minimum.

Bemerkung:

Das Vorzeichenkriterium der 2. Ableitung kann zur rechnerischen Bestimmung der Extrema nicht immer angewendet werden. Wir betrachten dazu ein ganz einfaches Beispiel: $f(x) = x^4$. Der Graph ist unten abgebildet. Wir sehen; daß f an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum hat. Wie kann man dieses lokale Minimum nun rechnerisch bestimmen?



Lösungsversuch mit dem 2.hinreichenden Kriterium:

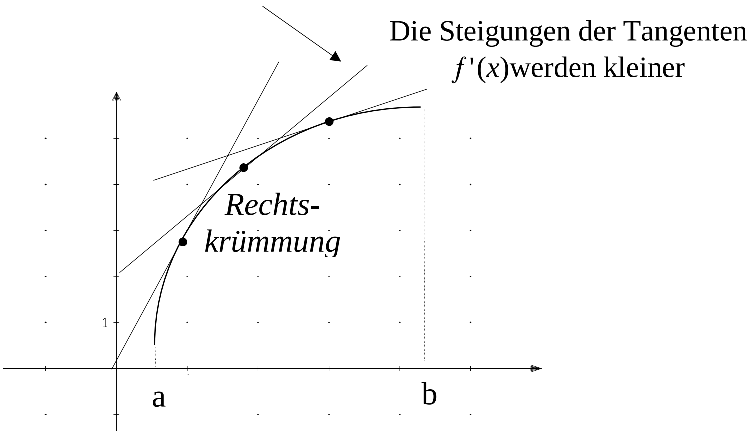
Wir bilden zunächst die 1. und 2. Ableitung:
$f'(x) = 4\,x^3$ und $f''(x) = 12\,x^2$.Setzen wir nun $x = 0$ in beide Ableitungsterme ein; so folgt; daß $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$ gilt und **nicht** (wie man vielleicht erwarten würde):$f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$. Mit Hilfe des 2. hinreichenden Kriterium gelingt es also nicht; das lokale Minimum von $f(x) = x^4$ rechnerisch zu bestimmen. Der Grund liegt darin; daß das Vorzeichenkriterium der 2. Ableitung nur ein **hinreichendes** Kriterium ist und kein notwendiges. Mit anderen Worten: wenn eine Funktion an einer Stelle x_0 ein lokales Extremum hat; so muß die 2. Ableitung $f''(x_0)$ dort nicht von Null verschieden sein.

11. Krümmung und Wendepunkte

Wir werden im folgenden zwei Begriffe definieren und präzisieren; die uns im Alltag anschaulich beim Befahren einer Straßenkurve vertraut sind. Wenn wir bei einer Kurve stets nach rechts lenken müssen; so sprechen wir von einer Rechtskurve; wenn wir nach links lenken müssen; von einer Linkskurve. Entsprechend werden nun für die Mathematik in bezug auf die Form eine Funktions-graphen die Begriffe *Rechtskrümmung* und *Linkskrümmung* definiert.

Wir betrachten dazu eine Funktion f, die auf einem Intervall [a; b] $\subseteq \mathbb{R}$ definiert ist und dort die Ableitung $f'(x)$ besitzt. Dann unterscheiden wir bezüglich des Funktionsgraphen $\mathbb{G}_f$ zwei Fälle:

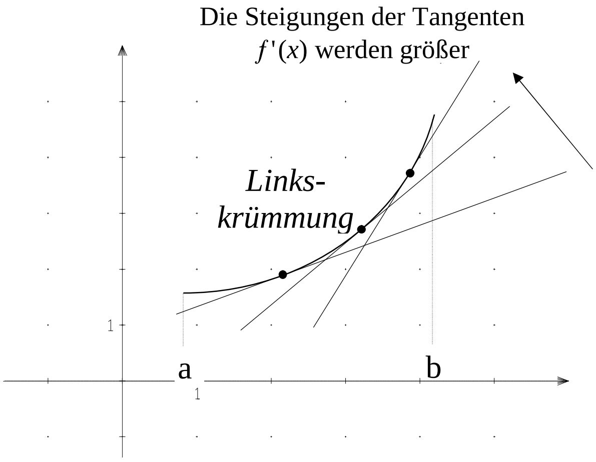
11.1 Die Rechtskrümmung:



Wenn von a bis b nun die Steigungen der Tangenten von $\mathbb{G}_f$ immer kleiner werden; wenn also die Ableitungsfunk-tion f' in [a; b] streng monoton *fallend* ist; dann heißt der Funktionsgraph $\mathbb{G}_f$ *rechts-gekrümmt*. Die genaue Definiti-on lautet also:

Definition 11.1
Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall [a; b] genau dann **rechtsgekrümmt**; wenn die 1**.** Ableitung f' auf [a; b] streng monoton fallend ist

11.2 Die Linkskrümmung:



Wenn von a bis b die Steigungen der Tangenten von $\mathbb{G}_f$ immer größer wer-den; wenn also die Ableitungsfunktion f' in [a; b] streng monoton *steigend* ist; dann heißt der Funktionsgraph $\mathbb{G}_f$ *links-gekrümmt*. Auch hier können wir entsprechend definieren:

Definition 11.2
Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall [a; b] genau dann **linksgekrümmt**; wenn die 1**.** Ableitung f' auf [a; b] streng monoton steigend ist

11.3 Wendepunkte:

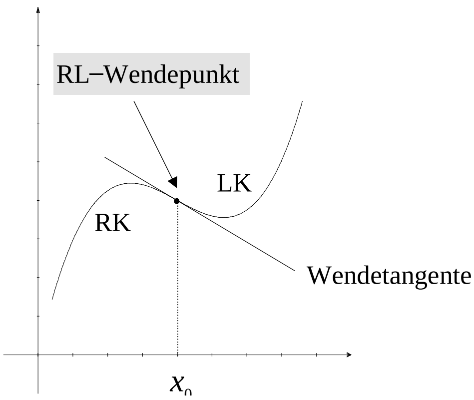
Wenn nun ein Funktionsgraph $\mathbb{G}_f$ an einer bestimmten Stelle x_0 ihr Krümmungsverhalten wechselt; dann nennen wir diese Stelle eine *Wendestelle* der Funktion und den dazugehörigen Punkt $P(x_0/f(x_0))$ einen *Wendepunkt* des Funktionsgraphen:

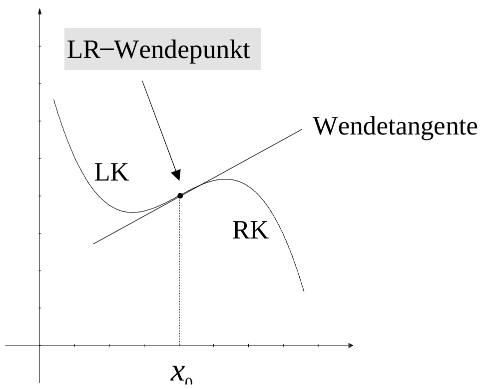
Definition 11.3

a) Die Stelle x_0 heißt genau dann eine **RL−Wendestelle** der Funktion f, wenn die 1. Ableitung f' an der Stelle x_0 ein lokales *Minimum* hat. Der Punkt $P(x_0/f(x_0))$ heißt dann RL−Wendepunkt von $\mathbb{G}_f$.

b Die Stelle x_0 heißt genau dann eine **LR−Wendestelle** der Funktion f, wenn die 1. Ableitung f' an der Stelle x_0 ein lokales *Maximum* hat. Der Punkt $P(x_0/f(x_0))$ heißt dann LR−Wendepunkt von $\mathbb{G}_f$.

c) Die Tangente von $\mathbb{G}_f$ *im Wendepunkt* heißt **Wendetangente**.





12. Kriterien für die Wendestellen einer Funktion f

12.1 Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

Laut Definition 10.3 liegt an der Wendestelle x_0 einer Funktion f ein lokales Extremum der Ableitungsfunktion f' vor. Wegen der notwendigen Bedingung für ein Extremum muß daher bei x_0 die Ableitung von f'; also die zweite Ableitung von f; die wir mit f'' bezeichnen; gleich Null sein. Das ist die notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

Satz

Wenn eine Funktion f an einer Stelle x_0

1. eine Wendestelle hat und
2. die 2. Ableitung $f''(x_0)$ existiert; } **dann** gilt: $f''(x_0) = 0$

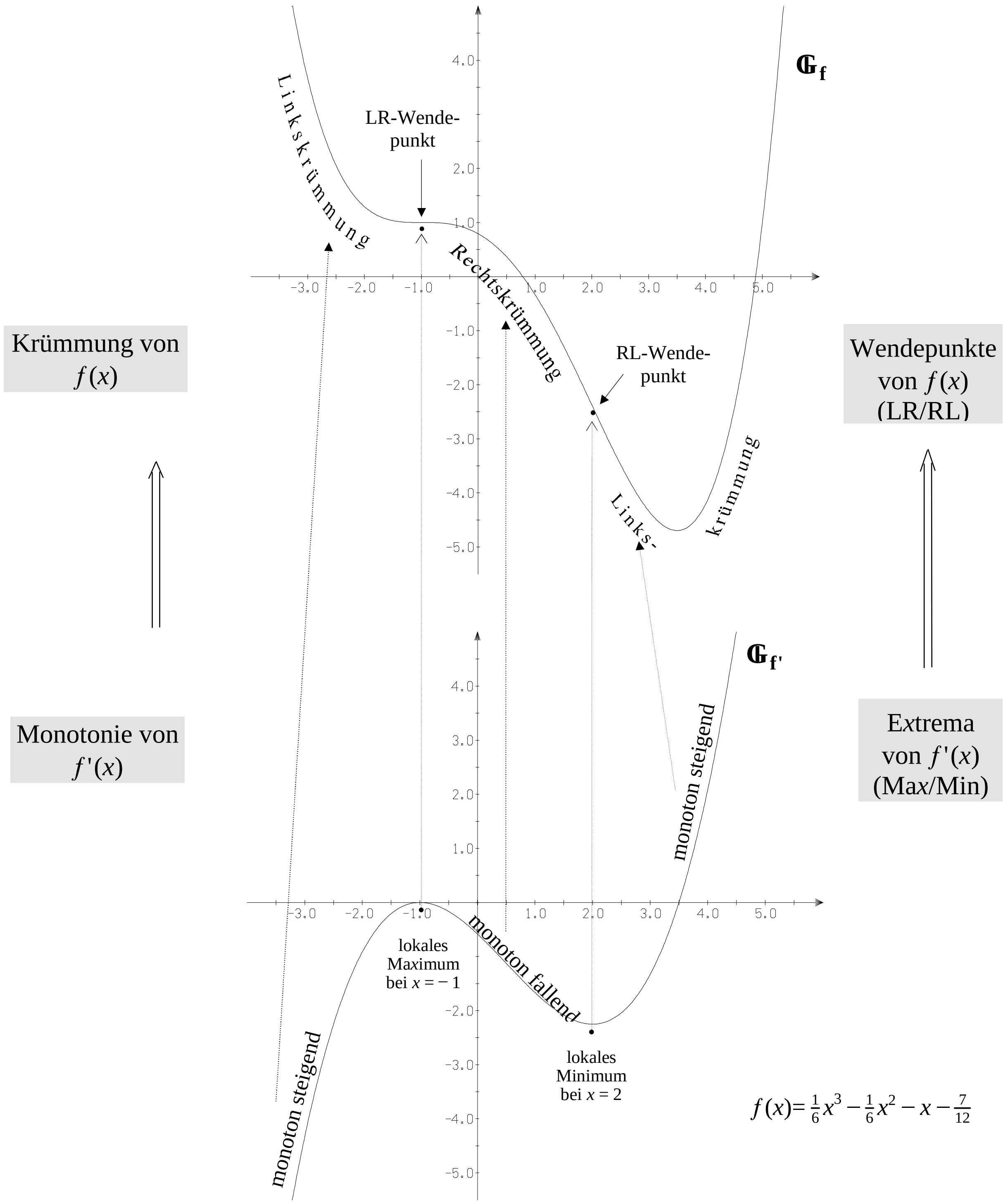
Für eine Wendestelle x_0 ist es also notwendig; daß $f''(x_0) = 0$ gilt!

Wichtige Bemerkung:

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht! Dazu ein Gegenbeispiel: $f(x) = x^4$ erfüllt an der Stelle $x_0 = 0$ zwar die Bedingung $f''(x_0) = 0$; dort liegt aber keine Wendestelle vor.

Krümmung und Wendepunkte

Das Verhältnis zwischen Monotonie der Ableitung f' und Krümmung der Funktion f



12.2 Zwei hinreichende Bedingungen für die Wendestellen einer Funktion f

a) Erste hinreichende Bedingung für die Existenz einer Wendestelle:

(Das Vorzeichenwechselkriterium der 2. Ableitung)

Satz 12.2a

Sei eine Funktion f und eine bestimmte Stelle $x_0 \in \mathbb{D}_f$ sowie die 2. Ableitung $f''(x)$ in einer Umgebung $U(x_0) \subseteq \mathbb{D}_f$ vorgegeben; dann gilt:

a) Wenn die 2. Ableitung f'' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von (+) nach (−) hat;	$\Rightarrow$	dann hat f bei x_0 eine LR−Wendestelle
b) Wenn die 2. Ableitung f'' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von (−) nach (+) hat;	$\Rightarrow$	dann hat f bei x_0 eine RL−Wendestelle

b) Zweite hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums:

(Vorzeichenkriterium der 2. Ableitung)

Satz 12.2b

Sei eine Funktion f und eine bestimmte Stelle $x_0 \in \mathbb{D}_f$ sowie die ersten drei Ableitungen bis $f'''(x_0)$ gegeben; dann gilt:

a) $f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) > 0 \Rightarrow \quad f$ hat bei x_0 eine RL−Wendestelle

b) $f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) < 0 \Rightarrow \quad f$ hat bei x_0 eine LR−Wendestelle