Reiner Winter

Grundbegriffe der elementaren Mathematik

I . Aussagenlogik

Aussage

Eine Aussage ist ein Satz, der *entweder* wahr *oder* falsch ist.

Beispiele:
a) 51 ist durch 17 teilbar (wahr)   b) $2 \cdot 3 = 5$ (falsch)

Negation

Unter der *Negation* einer Aussage A verstehen wir die verneinte Aussage “Non-A”. Sie hat zu A den gegensätzlichen Wahrheitswert, d.h., wenn A wahr ist, so ist Non-A falsch, und wenn A falsch ist, dann ist die Negation Non-A wahr.

Beispiele:

a) 51 ist *nicht* durch 17 teilbar (falsch)   b) $2 \cdot 3 \neq 5$ (wahr)

Konjunktion (Und -Verknüpfung)

Die Konjunktion zweier Aussagen $A \wedge B$ (gesprochen: A *und* B) ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann wahr ist, wenn **beide** Teilaussagen A und B wahr sind. Sie ist falsch, wenn *mindestens eine* der Teilaussagen falsch ist.

Beispiele:
a) 51 ist durch 17 teilbar *und* $2 \cdot 3 = 5$ (falsch)
b) 51 ist durch 17 teilbar *und* $2 \cdot 3 \neq 5$ (wahr)

Adjunktion (Oder -Verknüpfung) und
Disjunktion (Entweder- oder -Verknüpfung)

(1) Eine Adjunktion $A \vee B$ (gesprochen: A *oder* B) ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der Teilaussagen wahr ist. Sie ist falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind.

Beispiele:
a) 51 ist durch 17 teilbar *oder* $2 \cdot 3 = 5$ (wahr)
b) 51 ist nicht durch 17 teilbar *und* $2 \cdot 3 = 5$ (falsch)

(2) Eine Disjunktion $A \dot{\vee} B$ (gesprochen: *entweder* A *oder* B) ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann wahr ist, wenn beide Teilaussagen verschiedene Wahrheitswerte haben. Sie ist falsch, wenn sie die gleichen Wahrheitswerte haben.

Beispiele:
a) Entweder ist 51 durch 17 teilbar *oder* $2 \cdot 3 \neq 5$ (falsch)
b) Entweder ist 51 durch 17 teilbar *oder* $2 \cdot 3 = 5$ (wahr).

Subjunktion (Wenn-dann-Verknüpfung)

Eine Subjunktion $A \to B$ (gesprochen: *wenn* A, *dann* B) ist eine Aussagenverknüpfung, die *nur* falsch ist, wenn der Vordersatz A wahr und der Folgesatz B falsch ist.
In allen anderen Fällen ist die Subjunktion wahr.

Merke: Wenn der Vordersatz falsch ist, dann ist die gesamte Subjunktion wahr!!!

Beispiele:

a) Wenn 51 durch 17 teilbar ist, dann ist $2^{-3} = \frac{1}{8}$ (falsch)

b) Wenn 51 nicht durch 17 teilbar ist, dann ist $2^{-3} = -8$ (wahr !!!)

Notwendig und hinreichend

Mit den Wörtern notwendig und hinreichend werden zwei verschiedene Seiten einer Subjunktion $A \rightarrow B$ (Wenn A, dann B) erfaßt. Im einzelnen gelten die folgenden Bezeichnungen:
Der Vordersatz A stellt die hinreichende Bedingung des Hintersatzes B dar.
Der Hintersatz B stellt die notwendige Bedingung des Vordersatzes A dar.

$$A \rightarrow B$$

A ist *hinreichend* für **B** | **B** ist *notwendig* für **A**.

Beispiel:

Wenn eine Zahl x größer als 1 ist ($x > 1$),
dann ist auch ihr Quadrat x^2 größer als 1 ($x^2 > 1$).

In Formelsprache: $x > 1 \rightarrow x^2 > 1$.

Dieser Satz kann mit den Wörtern *notwendig* und *hinreichend* wie folgt formuliert werden:
a) $x > 1$ ist *hinreichend* für $x^2 > 1$ oder b) $x^2 > 1$ ist *notwendig* für $x > 1$.

Merke:
Die Umkehrung des Satzes gilt nicht: Gegenbeispiel: $x = -2$; $(-2)^2 = +4 > 1$, aber $-2 < 1$.

Bijunktion (Genau dann, wenn -Verknüpfung)

Eine Bijunktion $A \leftrightarrow B$ (gesprochen: A genau dann, wenn B) zwischen A und B ist eine Aussagenverknüpfung, die genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen den *gleichen* Wahrheitswert haben. Sie ist falsch, wenn beide Aussagen *verschiedene* Wahrheitswerte haben.

Beispiel: Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn es gleichwinklig ist.

II . Mengenlehre

Georg Cantor, der Begründer der Mengenlehre, definierte den Begriff der Menge wie folgt:

Menge

Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente” von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Schreibweise für Mengen und Elemente

Wir bezeichnen Mengen mit großen lateinischen Buchstaben A, B, C usw. und wählen bei der Vorstellung ihrer Elemente die beiden folgenden Formen:

a) Die aufzählende Form:

Wenn man z.B. die Planeten unseres Sonnensystems zu einer Menge M zusammenfassen möchte, so schreiben wir dies in der folgenden Form auf:

M = {Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto}.

Die Elemente werden also einfach der Reihe nach aufgezählt, durch ein Komma voneinander getrennt und mit einer geschweiften Klammer als Menge kenntlich gemacht. Die *Reihenfolge* der Elemente ist dabei unwichtig.

b) Die beschreibende Form:

Bei Mengen mit unendlich vielen Elementen, z.B. bei der Menge der ungeraden Zahlen, ist eine vollständige Aufzählung der Elemente nicht möglich. Die Elemente solcher Mengen müssen durch Eigenschaften charakterisiert und beschrieben werden. Dies geschieht z.B. für die ungeraden Zahlen in folgender Weise:

$U = \{x \mid x \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$

Gesprochen: U ist die Menge *aller x, für die gilt: x* ist eine ungerade Zahl.

Das Symbol $\{x \mid \ldots\}$ ist eine Abkürzung für den Ausdruck: “die Menge aller *x*, für die gilt: ... ”

Verhältnis von Menge und Element

Wenn wir zum Ausdruck bringen wollen, daß die Zahl 3 eine ungerade Zahl ist, also zur Menge U aller ungeraden Zahlen gehört, so setzen wir zwischen der 3 und U den griechischen Buchstaben “$\in$” ($\in$ = *griech.* Buchstabe *Epsilon*, er entspricht dem lateinischen “e”). Wir schreiben also:

$3 \in U$ gesprochen: *3 ist ein Element der Menge U.*

$4 \notin U$ gesprochen: *4 ist **kein** Element der Menge U.*

Allgemeine Schreibweise des Element-Seins

1. Sei A eine Menge und a ein Element von A, dann schreiben wir:
   $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ (a ist ein Element von A).

2. Sei A eine Menge und a **kein** Element von A, dann schreiben wir:
   $\mathbf{a} \notin \mathbf{A}$ (a ist kein Element von A).

Die “einelementigen” Menge

Unter einer “einelementigen” Menge M verstehen wir eine Menge, die genau ein Element a hat. Wir schreiben dann: M = {a}.

Die “leere” Menge

Unter der “leeren” Menge verstehen wir diejenige Menge (!), die **kein** Element hat. Wir schreiben dann eine leere Mengenklammer: {}.

Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, in Zeichen A = B, genau dann, wenn sie dieselben Elemente enthalten, das heißt: *Jedes* Element von A ist auch ein Element von B und umgekehrt.

Formal: $A = B \leftrightarrow$ Für alle Elemente $x \in \mathbb{G}$ gilt: $[x \in A \leftrightarrow x \in B]$.

Teilmenge

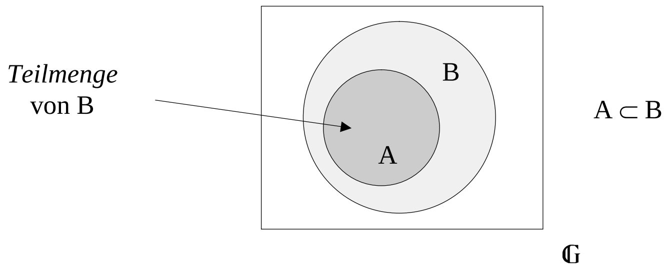
Wenn alle Elemente einer Menge A auch Elemente einer Menge B sind und $A \neq B$ ist, dann heißt A *echte Teilmenge* von B. Wir schreiben dann: $A \subset B$. Wir können diese Definition auch logisch formalisieren:

$A \subset B \quad \leftrightarrow \quad$ Für alle $x \in \mathbb{G}$ gilt: $[x \in A \rightarrow x \in B] \wedge A \neq B$.

Wenn A *keine* Teilmenge von B ist, so schreiben wir $A \not\subset B$.

Venn-Diagramm oder **Euler-Diagramm**

Wir können die Teilmengenbeziehung anhand eines Kreisdiagramms veranschaulichen: Wählt man für die Grundmenge $\mathbb{G}$ ein Rechteck und für die Menge A und B geometrisch zwei Kreisflächen, dann ist die die Menge A darstellende Fläche völlig in der die Menge B darstellenden Fläche enthalten. Die Menge B *umfaßt* also die Teilmenge A:



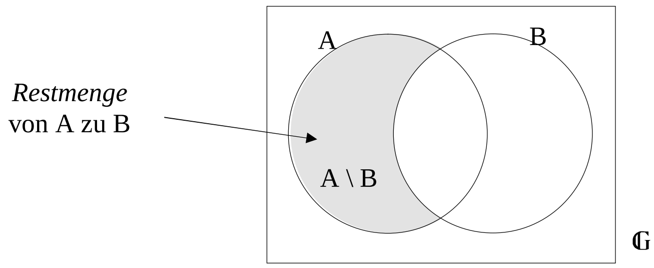
Wir nennen eine solche Darstellung von Mengen ein **Venn-Diagramm** oder ein **Euler-Diagramm**.

Bemerkung:

Die leere Menge {} ist eine echte Teilmenge einer jeden anderen Menge A, das heißt, es gilt für jede Menge A die Beziehung: $\{\} \subset A$.

Die Restmenge

Wenn man aus einer Menge A alle diejenigen Elemente herausnimmt, die auch noch zu einer Menge B gehören, so nennen wie die Menge, die dabei übrigbleibt, die *Restmenge* von A zu B. Sie wird mit dem Symbol A \ B (*lies: A ohne B*) bezeichnet. Euler-Diagramm:

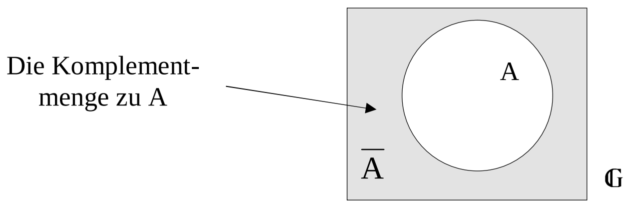


Wenn A und B zwei Mengen sind, dann heißt die Menge:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ die *Restmenge* von A zu B.
Das Zeichen “A \ B” wird gelesen: “A *ohne* B”.

Die Komplementmenge

Wenn A eine Menge ist und $\mathbb{G}$ die Grundmenge, so heißt die Restmenge $\mathbb{G} \setminus A$ auch Komplementmenge zu A und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet. Wir betrachten dazu ein Venn-Diagramm:

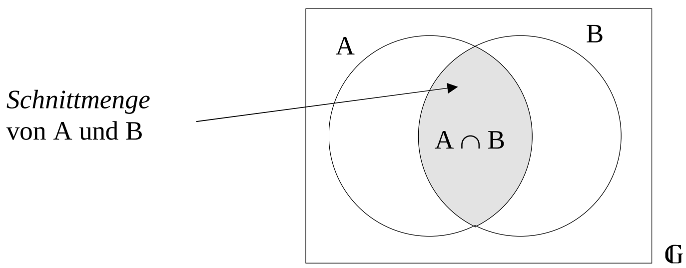


Wenn A eine Menge ist und $\mathbb{G}$ die Grundmenge, dann heißt die Menge:

$\overline{A} = \mathbb{G} \setminus A = \{x \mid x \in \mathbb{G} \wedge x \notin A\}$ *Komplementmenge* von A. Das Zeichen “$\overline{A}$” wird kurz gelesen: “Das Komplement von A”.

Die Schnittmenge

Die Menge aller Elemente, die *sowohl* zu einer Menge A *als auch* zu einer Menge B gehören, heißt die Schnittmenge der Mengen A und B. Sie wird mit dem Symbol $A \cap B$ (gesprochen: A *geschnitten* mit B) bezeichnet.



Wenn A und B zwei Mengen sind, dann heißt die Menge:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ die *Schnittmenge* von A und B. Das Zeichen $A \cap B$ wird gelesen: “A *geschnitten* mit B”.

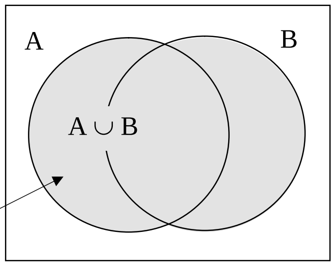
Bemerkung:

Es gibt einige besondere Schnittmengen, die man sofort aus der Definition herleiten kann:

a) $A \cap A = A$ b) $A \cap \{\} = \{\}$ c) $A \cap \mathbb{G} = A$.

Die Vereinigungsmenge

Wenn man von zwei Mengen A und B alle Elemente zu einer großen Gesamtmenge zusammenfaßt, so entsteht eine neue Menge. Diese Gesamtmenge heißt Vereinigungsmenge von A und B und wird mit dem Mengenymbol $A \cup B$ (gesprochen: A *vereinigt mit* B) bezeichnet. Wir können zur Veranschaulichung der Vereinigungsmenge das folgende Diagramm zeichnen:



Vereinigungsmenge
von A und B

$\mathbb{G}$

Wenn A und B zwei Mengen sind, dann heißt die Menge:

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ die *Vereinigungsmenge* von A und B.

Das Zeichen $A \cup B$ wird gelesen: “A *vereinigt* mit B”.

Wichtige Zahlenmengen

a) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...$ usw.$\}$ heißt *Menge der natürlichen Zahlen*.

Bemerkungen:

1. Die Zahl “Null” ist nach dieser Definition keine natürliche Zahl, es gilt also $0 \notin \mathbb{N}$.
2. Die “unechten Brüche” z.B. $\frac{5}{1}$, $\frac{32}{8}$, $\frac{84}{12}$ usw. sind auch natürliche Zahlen, weil ihr Rechenergebnis eine natürliche Zahl ist, z.B. $\frac{56}{7} = 8 \in \mathbb{N}$.
3. Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine unendliche Menge, weil wir prinzipiell immer weiterzählen können, das heißt, daß es zu jeder Zahl x immer wieder eine weitere Zahl $x + 1$ gibt.

b) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen:

Die Menge $\mathbb{Z} = \{ ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... \}$ heißt *Menge der ganzen Zahlen*.

Bemerkungen:

Die Menge der positiven ganzen Zahlen ist mit der Menge der natürlichen Zahlen identisch. Die Zahl “0” ist weder positiv noch negativ.

c) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:

Die Menge $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \}$ heißt Menge der *rationalen Zahlen*.

Es ist also die Menge *aller* (echten und unechten) Bruchzahlen: $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$. Eine rationale Zahl ist demnach ein Bruch, bei dem der Zähler z eine *ganze* Zahl und der

Nenner n eine *natürliche* Zahl ist. Damit ist auch ausgeschlossen, daß der Nenner 0 ist; denn eine Division durch Null ist nicht definiert.

Als Dezimalzahldarstellung einer rationalen Zahl erhalten wir entweder eine *abbrechende* oder eine *periodische* Dezimalzahl.

Beispiele: $\frac{743}{100} = 7{,}43$; $\frac{43}{99} = 0{,}434343...$ $-\frac{3}{1000} = -0{,}003$; $-\frac{1}{9} = 0{,}111...$

d) Die Menge I der irrationale Zahlen

Der Begriff “rational” leitet sich von dem lateinischen Wort *ratio* (= Vernunft) her. In der Geschichte der Mathematik waren die rationalen Zahlen solche Zahlen, von denen man sagte, daß sie durch die Vernunft erfaßt werden. Später sind dann weitere Zahlen entdeckt worden, die nicht mehr als “rational” begriffen wurden, wie etwa die Zahl $\sqrt{3} \approx 1{,}73...$ oder die Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14...$; denn es konnte nachgewiesen werden, daß sie nicht als Bruchzahl dargestellt werden können. Diese Zahlen wurden dann auch nicht-rationale Zahlen oder *irrationale* Zahlen genannt.

Als Dezimalzahldarstellung einer irrationalen Zahl erhalten wir stets eine *nicht-abbrechende* und *nicht-periodische* Dezimalzahl.

e) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Faßt man alle rationalen und alle irrationalen Zahlen zu einer großen Zahlenmenge zusammen so erhalten wir die Menge der reellen Zahlen.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$

Die Größer-Kleiner-Ordnung in $\mathbb{R}$

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist hinsichtlich der Zahlengröße "geordnet"; d.h. von beliebigen reellen Zahlen a; b $\in \mathbb{R}$ gilt genau einer der folgenden drei Fällle:

I. $a > b$: "a ist größer als b"
II. $a = b$: "a ist gleich b"
III. $a < b$: "a ist kleiner als b"

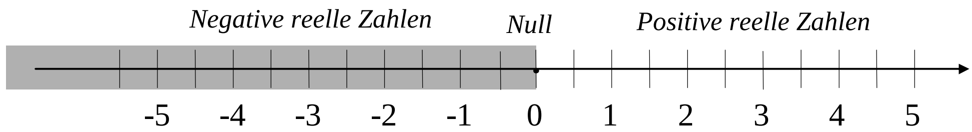
Mit Hilfe dieser Ordnungsrelation können wir nun die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ definieren:

1. $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0\}$ die Menge der *positiven* reellen Zahlen.
2. $\mathbb{R}^- = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x < 0\}$ die Menge der *negativen* reellen Zahlen.
4. $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ die Menge der *nichtnegativen* reellen Zahlen. (Hier gehört die Null mit dazu!)
5. $\mathbb{R}_0^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ die Menge der *nichtpositiven* reellen Zahlen. (Hier gehört die Null auch mit dazu!)

Die graphische Darstellung der Menge $\mathbb{R}$

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kann durch eine bekannte "Zahlengerade" graphisch dargestellt werden:

Zahlengerade



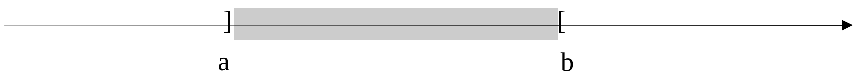
Intervalle

Zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$; z.B. alle Zahlen; die zwischen −1 und 2 liegen; heißen Intervalle von $\mathbb{R}$. Wir definieren:

a) Das offene Intervall:

Wenn a und b zwei rationale Zahlen sind; wobei a < b gilt; dann heißt die Menge aller rationalen Zahlen; die *zwischen* a und b liegen "*das offene Intervall von a bis b*" und wird mit dem Symbol]a;b[bezeichnet:

]a;b[= $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x \wedge x < b\}$ heißt *offenes* Intervall von a bis b



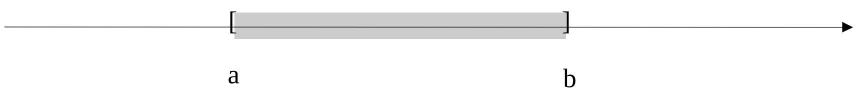
Bemerkung:

Die beiden Intervallgrenzen a und b gehören nicht mit zum offenen Intervall: a $\notin$]a;b[und b $\notin$]a;b[. Dies bedeutet; daß das offene Intervall]a;b[kein kleinstes und kein größtes Element hat.

b) Das abgeschlossene Intervall:

Wenn zu dem offenen Intervall]a;b[noch die beiden Grenzen a und b hinzugenommen werden; so erhalten wir "*das abgeschlossene Intervall von a bis b*" und dies wird mit dem Symbol [a;b] bezeichnet. Wir können nun mit Hilfe des "≤"- Zeichens genauer definieren:

[a;b] = $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \le x \wedge x \le b\}$ heißt *abgeschlossenes* Intervall von a bis b



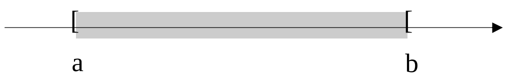
Bemerkung:

Die beiden Intervallgrenzen a und b gehören jetzt mit zum abgeschlossenen Intervall: a $\in$ [a;b] und b $\in$ [a;b]. Dies bedeutet; daß das abgeschlossene Intervall [a;b] ein kleinstes und ein größtes Element hat; nämlich die beiden Intervallgrenzen a und b.

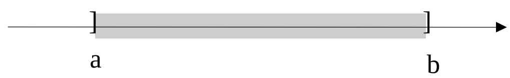
c) Halboffene und halbgeschlossene Intervalle

Man kann auch *einseitig* offene bzw. einseitig geschlossene Intervalle definieren; die *halb*offen bzw. halbgeschlossen genannt werden. Die folgenden Intervalle:

1) [a;b[= $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \le x \wedge x < b\}$



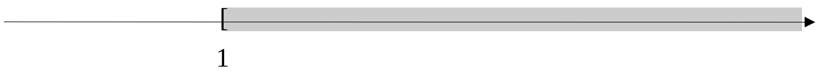
2)]a;b] = $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x \wedge x \le b\}$



heißen halboffen bzw. halbgeschlossene Intervalle. Und zwar nennt man das Intervall (a) auch *rechtsoffen* während (b) *linksoffen* genannt wird.

d) Das Symbol "∞" und "unendliche" Intervalle

Wenn wir einmal alle rationalen Zahlen betrachten; die größer oder gleich 1 sind; so erhalten wir das folgende Bild:

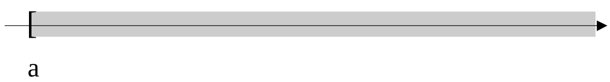


Wir nennen eine solche solche Teilmenge von ℝ ein unendliches Intervall und bezeichnen es mit dem Symbol $[1;\infty[$. (*lies: das halboffene Intervall von 1 bis "unendlich".*)
Das Symbol "∞" bezeichnet *keine* rationale Zahl; erst recht nicht die "größte reelle Zahl"; denn es gibt in ℝ keine größte Zahl. Das Zeichen "∞" hat in der Mathematik die *prozeßhaft*; anschauliche Bedeutung; daß wir eine Folge von Zahlen betrachten; die größer und größer werden; etwa 100; 1000; 10 000; 100 000; 1 000 000 u.s.w. Wir *denken* uns also einen Fortschreitungsprozeß von jeweils größeren Zahlen; der *immer weiter* geht. In dem Ausdruck "immer weiter" liegt das Denken des Unendlichen in der Mathematik.
Im Intervall $[1 ; \infty[$ hat das "Unendlich"-Symbol: "∞" die folgende Bedeutung:

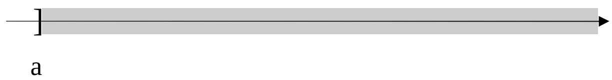
Zu *jeder* reellen Zahl b >1 gehört auch *jede* größere reelle Zahl z > b
zu dem Intervall $[1 ; \infty [$.

Wir können also definieren:

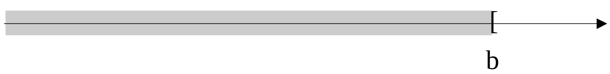
$[a ; \infty [\ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq a\}$



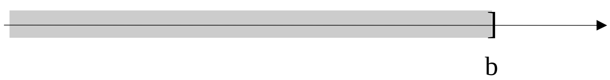
$] a ; \infty [\ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > a\}$



$]-\infty ; b [\ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < b\}$



$]-\infty ; b] \ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b\}$



$]-\infty ; +\infty[\ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$!

III. Gleichungslehre

Variable

Variable sind Buchstaben oder andere Symbole, die als Platzhalter für Zahlen stehen, d.h. überall dort, wo sie stehen, können Zahlen einer vorgegebenen Grundmenge eingesetzt werden.

Grundmenge einer Variablen

Die Menge, aus der die geeigneten Ersetzungen für die jeweilige Variable genommen werden, heißt Grundmenge $\mathbb{G}$ der Variablen.

Aussageformen

Eine Aussageform ist ein sprachlicher Ausdruck mit mindestens einer Variablen, der durch Einsetzen von Zahlen für die Variablen zu (wahren oder falschen) Aussagen werden.

Beispiele: x ist eine Primzahl; $x^2 < 4$; $x + y > 10$; $a \in \mathbb{N}$.

Lösungsmenge einer Ausageform:

Die Menge aller Elemente, die eine Aussageform zu einer wahren Aussage machen, heißt Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Aussageform.

Term

Der Begriff des Terms wird wie folgt festgelegt:

1. Alle Zahlen sind Terme
2. Alle Variablen sind Terme
3. Alle *wohldefinierten* Verknüpfungen (z.B. Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Potenz, Wurzel, Betrag usw.) von Zahlen oder Variablen sind wieder Terme.

Beispiele: 5; -17; x: $2b$; x^3; $3x - \sqrt{a}$ sind Terme.

Gegenbeispiele: $x : (y +$; 2^{4-}; $3 \in \mathbb{N}$; $\frac{x}{0}$; $\sqrt{-1}$ sind keine Terme.

Definitionsmenge eines Terms

Die Menge aller Zahlen einer Grundmenge $\mathbb{G}$, die für die Variablen des Terms T eingesetzt wieder eine Zahl aus $\mathbb{G}$ ergeben, heißt Definitionsmenge $\mathbb{D}$ des Terms T bezüglich der Grundmenge $\mathbb{G}$.

Beispiele: $T = \frac{1}{x-3}$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$; dann ist $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$;

$T = \sqrt{x}$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$; dann ist $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Gleichung

Verbindet man zwei Terme T_1 und T_2 mit dem Gleichheitszeichen " = ", dann entsteht eine Gleichung: $T_1 = T_2$.

Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Die Gleichung $T_1 = T_2$ enthält *keine* Variablen, sie ist also eine reine Zahlengleichung. Dann stellt die Gleichung eine *Aussage* dar. Sie ist wahr, wenn das Rechenergebnis von T_1 und das von T_2 dieselbe Zahl liefert. Anderenfalls ist sie falsch.

Beispiele: 1) $2^{-3} = \frac{6}{48}$ (wahr) 2) $-3^2 = 9$ (falsch).

b) Die Gleichung $T_1 = T_2$ enthält Variablen. Dann stellt die Gleichung eine *Aussageform* dar. Durch Einsetzen von Zahlen für die Variablen entsteht dann eine reine Zahlengleichung, also eine Aussage, die wahr oder falsch ist.

Beispiele: 1) $x^3 = 27$ (für $x = 3$ wahr, sonst falsch)
2) $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) = 0$
(für $x = 0$ oder $x = 1$ oder $x = -3$ wahr, sonst falsch).

Lösungsmenge einer Gleichung

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer Gleichung ist die Menge aller Elemente, die bei Einsetzung für die Variablen die Gleichung zu einer *wahren* Aussage machen.

Beispiele:

a) $x^2 = 9$, $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$
b) $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 4) = 0$, $\mathbb{L} = \{-4; 0; 3\}$
c) $x + y = 3 \;\wedge\; x - y = 1$, $\mathbb{L} = \{(2; 1)\}$

Beachte: Die Lösungsmenge besteht hier aus nur einem (!) Element, nämlich aus einem geordneten Zahlenpaar (2; 1) .

Äquivalenz

Zwei Gleichungen heißen äquivalent (Zeichen: $\Leftrightarrow$), wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Beispiel: $3 \cdot x + 1 = 16 \;\Leftrightarrow\; x^3 = 125$; denn beide Gleichungen haben dieselbe Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{5\}$

Äquivalenzumformung

Eine Gleichungsumformung heißt Äquivalenzumformung, wenn die ursprüngliche Gleichung und die neue äquivalent sind.

Beispiele:

a)
$$\begin{aligned} & 3 \cdot x + 1 = 16 \quad | -1 \\ \Leftrightarrow\; & 3 \cdot x = 15 \quad | : 3 \\ \Leftrightarrow\; & x = 5 \\ & \mathbb{L} = \{5\} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & x \cdot (x + 3) = 0 \quad | \text{ Produktsatz} \\ \Leftrightarrow\; & x = 0 \;\vee\; x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\; & x = 0 \;\vee\; x = -3 \\ & \mathbb{L} = \{0; -3\} \end{aligned}$$

Allgemeingültigkeit

Eine Gleichung heißt *allgemeingültig* (über ihrer Definitionsmenge), wenn ihre Lösungsmenge gleich ihrer Definitionsmenge ist.

Beispiel: Die Gleichung: $x + 1 = 1 + x$ ist allgemeingültig; denn $\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Formel

Eine allgemeingültige Gleichung heißt auch Formel.

Beispiel: Die Gleichung: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist eine Formel, denn sie ist allgemeingültig
(für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$).

Unlösbarkeit

Eine Gleichung heißt *unlösbar* (über ihrer Definitionsmenge), wenn ihre Lösungsmenge leer ist.

Beispiel: Die Gleichung $x + 1 = x$ ist unlösbar; denn $\mathbb{L} = \{\}$.

IV. Funktionen

Funktion

Eine *Funktion* f ist eine *Zuordnung***,** durch die jedem Element x (z.B. 3) einer vorgegebenen Menge, der sogenannten Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$, *eindeutig* ein Element y (z.B. 9) einer anderen Menge, der sogenannten Wertemenge $\mathbb{W}_f$, zugeordnet wird. Wir unterscheiden bei einer Funktion folgende Bezeichnungen:

f	Funktionsname	Bezeichnung der Zuordnung
$3 \in \mathbb{D}_f$	Stelle oder Argument	Ein konkretes Element der Definitionsmenge
$9 \in \mathbb{W}_f$	Funktionswert	Ein konkretes Element der Wertemenge
x	Stellenvariable oder Argumentenvariable	Variable für die Elemente der Definitionsmenge
y	Wertevariable	Variable für die Elemente der Wertemenge
$f(x)$	Funktionsterm	Term mit der Variablen x, der die Art der Funktion bestimmt
$y = f(x)$	Funktionsgleichung	Gleichung zwischen der Wertevariablen und dem Funktionsterm

Darstellung einer Funktion:

Funktionsname Argumentenvariable Funktionsgleichung Funktionsterm

$$\boldsymbol{f\colon x \longmapsto y = f(x)\ ,\quad x \in \mathbb{D}_f \quad y \in \mathbb{W}_f}$$

Zuordnungspfeil Definitionsmenge Wertemenge

Beispiele:

a) $f(x) = x^2$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathbf{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.

Konret wird: $f(3) = 9$ wie folgt gesprochen: f hat an der Stelle $x = 3$ den Funktionswert y = 9.

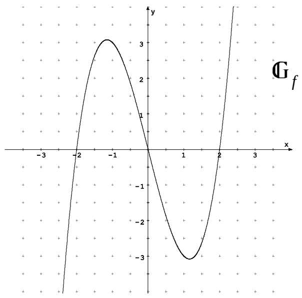
b) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$; $\mathbf{W}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Konret wird: $f(0) = -1{,}5$ wie folgt gesprochen: f hat an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert y = –1,5.

Graph einer Funktion

Der **Graph** $\mathbb{G}_f$ einer Funktion f ist die Menge aller Punkte P(x / y) im Koordinatensystem, deren Koordinaten x und y die Funktionsgleichung: $y = f(x)$ erfüllen, formal also: $\mathbb{G}_f = \{P(x / y) \mid y = f(x)\}$

Beispiel:
Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x^3 - 4x$



Der Graph $\mathbb{G}_f = \{P(x / y) \mid y = x^3 - 4x\}$ dieser Funktion kann nun mit Hilfe einer **Wertetabelle** gezeichnet werden:

x	-2.5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	-5,6	0	2,6	3	1,9	0	-1,9	-3	-2,6	0

Lineare Funktion

Eine Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = m \cdot x + b$, bei der also die Variable x höchstens in 1. Potenz vorkommt, heißt **lineare Funktion.**

Gerade

Der Graph $\mathbb{G}_f = \{P(x/y) \mid y = m \cdot x + b\}$ einer linearen Funktion ist eine *Gerade*. Sie hat die *Steigung m* und die Schnittstelle mit der y-Achse an der Stelle $y = b$.

Steigung einer Geraden

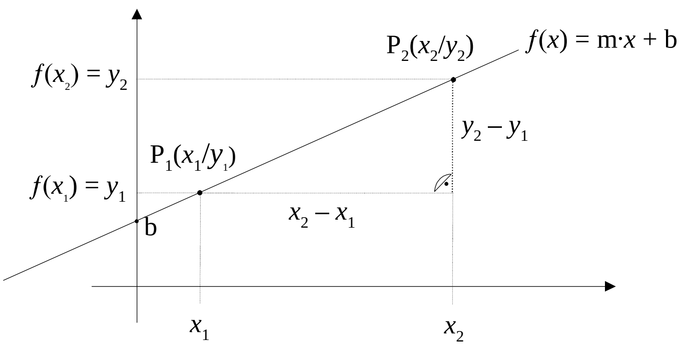
Die Steigung einer Geraden ist der Quotient:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ für zwei *beliebige*, *verschiedene* Punkte P (x_1 / y_1) und $P_2(x_2 / y_2)$ auf

der Geraden.

Die Steigung m ist ein Quotient zweier Differenzen und heißt daher *Differenzenquotient.*

Wir wollen diesen Zusammenhang in Form einer Zeichnung zusammenfassend darstellen:



Formel für die Steigung:

(Differenzenquotient)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Quadratische Funktion

Eine Funktion *f* mit dem Funktionsterm $f(x) = a\cdot x^2 + bx + c$, bei der also die Variable *x* in 2. Potenz vorkommt, heißt quadratische Funktion.

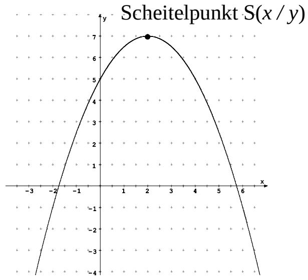
Quadratische Parabel

Der Graph einer quadratischen Funktion

$\mathbb{G}_f = \{P(x/y) \mid y = a\cdot x^2 + bx + c\}$

heißt quadratische Parabel.

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$



Scheitelpunkt einer quadratischen Parabel

Der Scheitelpunkt einer Parabel ist:

a) bei einer nach oben geöffneten Parabel der *tiefste* Punkt der Parabel
b) bei einer nach unten geöffneten Parabel der *höchste* Punkt der Parabel

Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Eine ganzrationale Funktion oder Polynomfunktion ist eine Funktion mit folgendem Funktionsterm:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit den *Koeffizienten* $a_i \in \mathbb{R}$.

Die höchste auftretende Potenz n der Variablen *x* wird als *Grad* der ganzrationalen Funktion bezeichnet.

Eine ganzrationale Funktion *ersten* Grades, also:
$f(x) = a_1 x + a_0$ ist eine *lineare* Funktion.

Eine ganzrationale Funktion *zweiten* Grades, also
$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ist eine *quadratische* Funktion.

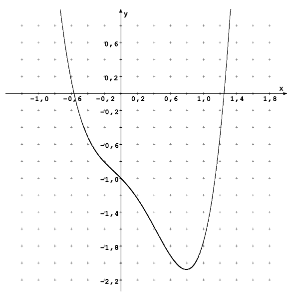
Eine ganzrationale Funktion *dritten* Grades, also
$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ist eine *kubische* Funktion.

Beispiele:

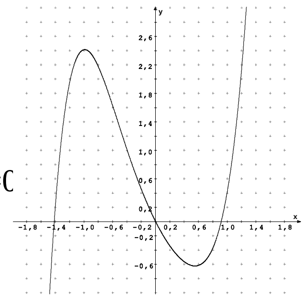
a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x + 1$

ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades mit Koeffizienten:

$a_4 = 3$; $a_3 = -2$; $a_2 = \frac{3}{4}$; $a_1 = -1$ und $a_0 = 1$.



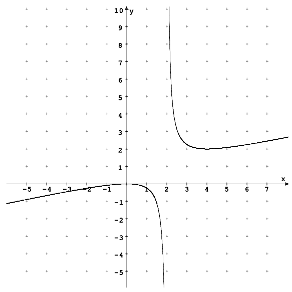
b) $f(x) = x^5 + 1{,}4 \cdot x^2 - 2x$
ist eine ganzrationale Funktion 5. Grades
mit Koeffizienten:
$a_5 = 1$; $a_4 = 0$; $a_3 = 0$; $a_2 = 1{,}4$; $a_1 = -2$ und $a_0 = 0$



Rationale Funktionen

Wenn $p(x)$ und $q(x)$ zwei ganzrationale Funktionen sind und der Grad von $q(x)$ mindestens gleich 1 ist, dann heißt die Funktion mit dem Quotiententerm:

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine **rationale Funktion.**



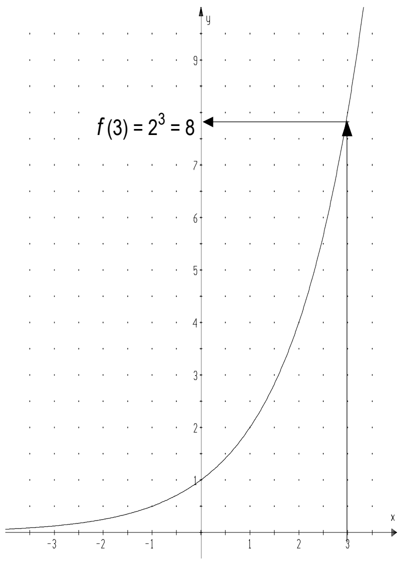
Beispiel: $f(x) = \frac{x^2}{4x - 8}$ ist eine rationale Funktion mit:

$p(x) = x^2$ und $q(x) = 4x - 8$

Exponentialfunktion

Wir betrachten einmal die Funktion $f(x) = 2^x$ mit $x \in \mathbb{R}$, bei der die Variable x als *Exponent* der *Basis* 2 vorkommt, und können eine graphische Darstellung der Funktion anfertigen, indem wir mit dem Taschenrechner eine Wertetabelle aufstellen und dann den Funktionsgraphen zeichnen:

x	2^x
-3,0	0,125
-2,5	0,177
-2,0	0,250
-1,5	0,354
-1,0	0,500
-0,5	0,707
0,0	1,000
0,5	1,414
1,0	2,000
1,5	2,828
2,0	4,000
2,5	5,657
3,0	8,000



Bei der Berechnung der Werte wollen wir uns noch einmal an die wichtigsten Definitionen und Potenzgesetze erinnern: Für jede Basis $b \in \mathbb{R}^+$ gilt:

(1) $b^1 = b$	(2) $b^0 = 1$	
(3) $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$	(4) $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$	(5) $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
(6) $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$	(7) $b^x : b^y = b^{x-y}$	
(8) $(b^x)^y = b^{x \cdot y}$	(9) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	(10) $a^x : b^x = (a:b)^x$

Bemerkung:
Die Basen a und b müssen positive, reelle Zahlen sein, also: a, b > 0.

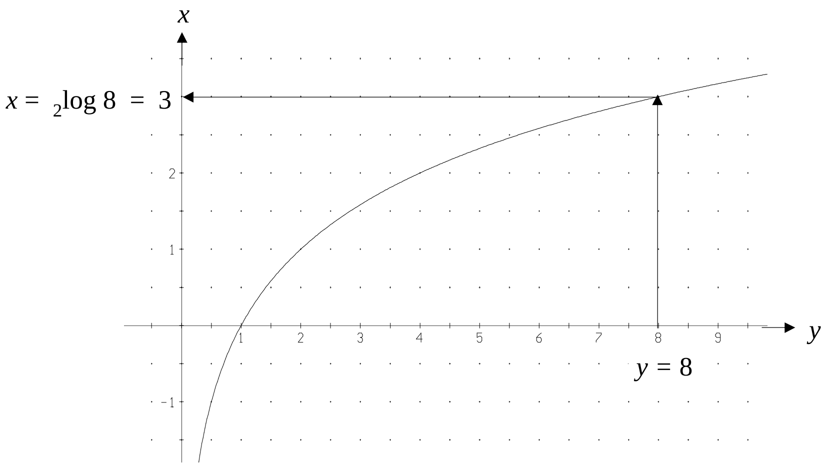
Logarithmusfunktion

Wenn wir zu einer vorgegebenen Zahl y, beispielsweise $y = 8$, den entsprechenden Exponenten x finden wollen, sodass: $2^x = 8$ gilt, so können wir dies graphisch durch die *Umkehrung* der Exponentialfunktion erreichen. Wir sehen an der Zeichnung, dass der Wert für den Exponenten bei $x = 3$ liegt. Bei dieser Umkehrung der Exponentialfunktion nennt man den Exponenten x auch **Logarithmus** von 8 zur Basis 2 (gr. *logos* = Rechnung, *arithmos* = Zahl). Man schreibt dann als Lösung der Gleichung: $2^x = 8$:

$x = {}_2\log 8 = 3$ (d.h. der Exponent zur Basis 2 von 8 ist gleich 3, also: $2^3 = 8$)

Das Zeichen ${}_2\log 8$ wird gelesen: "Logarithmus von 8 zur Basis 2". Allgemein können wir für eine beliebige reelle Basis b > 0 schreiben: $x = {}_b\log y \iff b^x = y$
Wir können nun den Logarithmus ${}_2\log y$ als *Funktion* von y betrachten, bei dem jedem positiven y jeweils der dazugehörige Exponent x zugeordnet wird, sodass $2^x = y$ gilt. Das ist die *Umkehrfunktion* zu $f(x) = 2^x$ und wir bezeichnen sie mit: $f^{-1}(y) = {}_2\log y$. Wenn wir in diese Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ in ein Koordinatensystem einzeichnen, dann brauchen wir nur die Spalten der obigen Tabelle für $f(x) = 2^x$ zu vertauschen:

$f(x)$	x
y	${}_2\log y$
0,125	-3,0
0,177	-2,5
0,250	-2,0
0,354	-1,5
0,500	-1,0
0,707	-0,5
1,000	0,0
1,414	0,5
2,000	1,0
2,828	1,5
4,000	2,0
5,657	2,5
8,000	3,0



Wir fassen allgemein zusammen:

> Der **Logarithmus $_b\log y$** ist der *Exponent x*, mit dem man die Basis b potenzieren muss, um die Zahl *y* zu erhalten:
>
> $$_b\log y = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = y$$
>
> **Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion**
>
> $$f(x) = b^x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1}(y) = {}_b\log y = x$$
>
> **Exponentialfunktion** **Logarithmusfunktion**

Der dekadische Logarithmus

Wenn in der obigen Formel die Basis b = 10 ist, so heißt der Logarithmus: $_{10}\log y$ auch "dekadischer Logarithmus" (von griech.: *deka* = zehn). Der dekadische Logarithmus wird auch kurz mit "lg *y*" bezeichnet, d.h.: $_{10}\log y = \lg y$. Es gilt dann:

$$10^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \lg y$$

Der dekadische Logarithmus lg *y* kann auf dem Taschenrechner mit der Tastenbelegung: $\boxed{\text{lg}}$ oder bei einigen Modellen auch mit $\boxed{\text{log}}$ ermittelt werden (nicht "ln", das behandeln wir später).

Siehe hierzu die ausführliche Fassung: Exponential und Logarithmusfunktion