Reiner Winter

Was ist ein Beweis?

Einleitung

Seit den Anfängen der Wissenschaft entstand das Bedürfnis, die Wahrheit der gewonnenen Erkenntnisse auch nachweisen und belegen zu können. Denn die Erfahrung lehrt, dass die Menschen sich leicht irren, dass ihre Sinne sie bisweilen täuschen und dass sie - aus welchen Gründen auch immer - oft die Unwahrheit sagen. Insofern hat jede Wissenschaft die charakteristische Grundeinstellung, nicht nur wissen zu wollen, *wie* etwas ist, sondern vielmehr noch, *warum* es so ist, wie es ist. Wissenschaft will *begründen* und *beweisen*.

So soll bei der Suche nach Erkenntnissen zugleich auch die *Gewissheit* erlangt werden, ob die Erkenntnisse zweifelsfrei wahr sind oder nicht. Die Wissenschaft sucht dabei eine *Methode*, mit der die Wahrheit des Wissens klar aufgezeigt werden kann, um dann jeder Erkenntnis auch noch ein „quod erat demonstrandum“ (lat. was zu beweisen war) anfügen zu können. Aber worin besteht die angemessene Methode, Wissen so darzustellen, dass es auch als „gesichert”, „unbezweifelbar” und „wahr” zum Ausdruck kommt? Diese Frage war und ist immer noch ein zentraler Gegenstand der Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie. Es ist die Frage, was denn eigentlich ein Beweis sei. Weiter entsteht das Problem, ob denn alle unsere Erkenntnisse überhaupt bewiesen werden können.

In der täglichen Lebenspraxis, wo es auch auf wahre Erkenntnisse ankommt, reicht es oft aus, die Wahrheit einer Aussage durch eine einfache Betrachtung aufzuweisen. Wenn etwa die Aussage „Es regnet” auf ihren Wahrheitsgehalt hin überprüft werden soll, so genügt es schon, einmal aus dem Fenster zu schauen oder ein paar Schritte vor die Tür zu gehen. Ein solcher praktischer Nachweis heißt in der Philosophie: *demonstratio ad oculos* (= Demonstration durch Augenschein). Für den Lebensalltag ist dies auch ausreichend, doch im Hinblick auf wissenschaftliche Erkenntnisse ist es sehr problematisch, sich nur auf die Augen zu verlassen; denn das Sehen kann ja einer optischen Täuschung unterliegen.

Inwiefern die bloße Betrachtung uns täuschen kann, zeigt sehr deutlich das berühmte astronomische Beispiel von der Bewegung zwischen Sonne und Erde: Wir *sehen*, dass die Sonne am Morgen „aufgeht”, wir *sehen*, dass sie sich „bewegt”, und wir *sehen,* dass sie am Abend „untergeht”. Dies *sehen* wir in der Tat, aber wir *wissen* spätestens seit Kopernikus (1473-1543), dass es in Wirklichkeit völlig anders ist, als wir es sehen. Es ist nicht die Sonne, die sich um die Erde, sondern es ist die Erde, die sich um ihre eigene Achse bewegt. Und dabei entsteht für uns, die wir auf der Erde leben und ihre Rotationsbewegung mitmachen, der falsche Schein, als ob wir ruhten und sich die Sonne bewegte.

Die „kopernikanische Wende” in der Betrachtung des Verhältnisses zwischen Sonne und Erde führte dazu, dass das alte, von Ptolemäus (100-160) aufgestellte *geozentrische* Weltbild (die Planeten bewegen sich um die *Erde* als Zentrum) im *Gegensatz* zu unserer täglichen Erfahrung durch das neue *heliozentrische* Weltbild des Kopernikus abgelöst wurde (die Planeten bewegen sich um die *Sonne* als Zentrum). Und Kopernikus verließ sich nicht mehr auf das *Sehen*, sondern ging bei seinem Weltmodell von mathematischen Berechnungen aus.

Wenn die Sinneswahrnehmungen also keine sichere Grundlage für die Wahrheit von Erkenntnissen bilden, so muss die Erkenntnis*gewissheit* also noch durch *Argumente begründet* werden. Die Erkenntnisse müssen mithin auch *rational* mit Hilfe von anderen Erkenntnissen so dargelegt werden, dass ihre Wahrheit deutlich wird. Denn Begründen heißt *Gründe* angeben, also bestimmte „frühere” Erkenntnisse, aus denen die zu begründende Erkenntnis dann mit Notwendigkeit folgt. Es ist also ein innerer *Zusammenhang* des Wissens gesucht, d. h. ein nach *Grund* und *Folge* geordnetes Erkenntnisgefüge, das die Begründung jeder einzelnen Erkenntnis gewährleistet.

1. Die Subjunktion als logische Form des Beweises

Wenn wir nun die *sprachliche Form* einer solchen rationalen Erkenntnisbegründung hinsichtlich ihrer logischen Struktur betrachten, so finden wir meist zwei charakteristische Begründungswörter, nämlich die beiden kausalen Konjunktionen „weil” und „denn”. So wird beispielsweise die Aussage „Die Leitung erwärmt sich” mit dem folgenden Satz begründet: „Die Leitung erwärmt sich, *weil* ein elektrischer Strom fließt”. Ganz analog können wir begründend auch den Satz: „Die Leitung erwärmt sich; *denn* es fließt ein elektrischer Strom” formulieren. Allgemein wird die Begründung einer Aussage A mit Hilfe einer anderen Aussage B in folgender Weise zum Ausdruck gebracht:

„A ist wahr, *weil* B gilt“ oder „A ist wahr; *denn* es gilt B“.

Wir bezeichnen diese kausalen Aussagenbeziehungen kurz mit:

A, *weil* B oder A; *denn* B.

Die kausalen Konjunktionen „weil” und „denn” können aber auch in Form von *Folgeverhältnissen* der sprachlichen Form „wenn-dann” ausgedrückt werden. So kann der Satz „Die Leitung erwärmt sich, *weil* ein elektrischer Strom fließt” auch in folgender Weise formuliert werden: „Das Erwärmen der Leitung ist eine *Folge* davon, dass ein elektrischer Strom fließt” oder kürzer: „Wenn ein elektrischer Strom fließt, dann erwärmt sich die Leitung”. Daran wird deutlich, dass wir bei den *begründenden* Formulierungen „A, *weil* B” oder „A; *denn* B” auch die aussagenlogischen Entsprechungen: „A ist die *Folge* von B” oder „Wenn B gilt, dann gilt auch A” verwenden können.

Die kausale Begründungsform „A, *weil* B“ kann formallogisch also als „Wenn B, dann A“ formuliert werden. Das macht zunächst eine logische Betrachtung der „Wenn - dann“ - Aussage notwendig.

In der traditionellen Logik hatte ein Urteil der Form „Wenn X, dann Y“ einen besonderen Namen. Es hieß „hypothetisches Urteil” (griech. *hypothesis* = Unterstellung, Annahme). Damit wurde ausgedrückt, dass unter der Hypothese der Gültigkeit der ersten Aussage X auch die zweite Aussage Y gültig ist.
Die Aussagenverknüpfung „Wenn X, dann Y” hat in der Logik den Namen *Subjunktion* (lat. *sub-iungere* = unter-binden, unterordnen) erhalten. Ihre *allgemeine* Definition geschieht mit Hilfe einer Wahrheitswertetabelle. Als Verknüpfungszeichen verwendet

man einen einfachen Pfeil „→”. Die Formalisierung „X → Y” wird damit als „Wenn X, dann Y“ gelesen. Wir erhalten dazu die folgende Wahrheitswertetabelle:

Subjunktion

X	Y	X → Y
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die untere Hälfte der Tabelle zeigt, dass alle „Wenn - dann” - Aussagen *wahr* sind, deren Vordersatz A falsch ist, ganz gleich, wie der Hintersatz B lautet. Diese Besonderheit der Subjunktion führt sehr häufig zu Missverständnissen, die für das Erfassen dessen, was ein Beweis ist, bedeutsam sind. Daher sollen sie an zwei Beispielen genauer betrachtet werden:

1. Wenn 2 . 2 = 5 ist, dann liegt Köln am Rhein.
2. Wenn 2 . 2 = 5 ist, dann ist der Mensch unsterblich.

Eine Konsequenz der Definition ist es nun, dass beide Aussagen *wahr* (!) sind. Denn in beiden Fällen ist der Vordersatz X: „2 · 2 = 5” *falsch* und gemäß der definierten Wahrheitswertetabelle ist dann die Subjunktion X → Y als *Gesamtaussage wahr*, unabhängig davon, was bei B steht. Auf den ersten Blick widerspricht das aber dem „gesunden Menschenverstand”; denn es scheint doch, als könne man mit einem falschen Vordersatz *alles* behaupten und dies wäre dann auch noch wahr! Das ist jedoch ein Missverständnis; denn:

> Die Subjunktion: „Wenn 2 · 2 = 5 ist, dann ist der Mensch unsterblich” ist zwar *als Gesamtaussage wahr,* aber daraus folgt nicht die Wahrheit des Folgesatzes: „Der Mensch ist unsterblich”. Dies wäre nur dann der Fall, wenn der Vordersatz wahr wäre, was er aber nicht ist.

Wir müssen bei einer Subjunktion X → Y also zwischen der *Gesamtaussage:* „Wenn X, dann Y” und der *Einzelaussage* „Y” unterscheiden. Wenn die *gesamte* Subjunktion X → Y wahr ist, so heißt das nicht, dass automatisch auch der *einzelne* Folgesatz Y wahr ist. Diese Unterscheidung ist für das Verständnis der Subjunktion sehr wichtig; denn sie verhindert, dass ihre Definition als „unlogisch” oder „unsinnig” erscheint. Die Definition der Subjunktion lautet also:

> Eine *Subjunktion* X → Y (gesprochen: *wenn* X, *dann* Y) ist eine Aussagen-verknüpfung, die *nur* falsch ist, wenn der Vordersatz A wahr und der Folgesatz Y falsch ist. In allen anderen Fällen ist die Subjunktion wahr.

Diese Definition ist sehr alt. Schon ein Schüler des Aristoteles, Philon von Megara (etwa 250 v. u. Z.), hat diese subjunktive „wenn-dann”-Aussage in dieser Weise definiert. Die Subjunktion wurde daher auch *Philonische Implikation* genannt. Jedoch ist das Wort „Implikation” (lat. *implicare* = hineinfalten, einschließen) missverständlich; denn damit wurde ursprünglich ausgedrückt, dass bei einer Beziehung der Form: „Wenn X, dann Y” der Wahrheitswert der Aussage A den der Aussage Y mit „einschließt”. Die Wahrheitswertetabelle der Subjunktion aber zeigt, dass dies in den Zeilen (2) und (3) gar nicht der Fall ist. Der Begriff der Implikation hat in der Logik aber eine andere

Bedeutung; denn damit werden Subjunktionen bezeichnet, die stets wahr sind, z.B. „wenn X und Y gilt, dann gilt auch Y und X“. Man verwendet dann zur Formalisierung einen zweifachen Pfeil: „⇒“ und kann wie folgt schreiben: $X \wedge Y \Rightarrow Y \wedge X$.

Sehr problematisch ist es auch, wenn die Subjunktion „materiale Implikation” genannt wird, wie dies in einigen Logikbüchern geschieht; denn das Adjektiv „material” weist eher auf einen *sachlichen* Inhalt hin als auf ein *logisches* Verhältnis. In der mittelalterlichen Logik ist die Subjunktion dann in folgender Weise interpretiert worden: *„Ex falso sequitur quodlibet, verum sequitur ex quolibet”* (Aus Falschem folgt Beliebiges, das Wahre folgt aus Beliebigem). Dieser Satz ist im streng logischen Sinne ebenfalls missverständlich, weil ein falscher Vordersatz nicht einfach *Beliebiges* als wahre Folge enthält.

Zusammenfassung:

Die kausalen Formulierungen „A, weil B“ oder „A; denn B“ können mit Hilfe der logischen Subjunktion „$B \rightarrow A$” ausdrückt werden, wobei die Reihenfolge der Variablen A und B vertauscht werden. Damit erhalten wir die folgende logische Äquivalenz:

A, *weil* B ⇔ A, *denn* B ⇔ $B \rightarrow A$.

Daran wird deutlich, dass die *Subjunktion* $X \rightarrow Y$ die aussagenlogische Grundform eines Beweises darstellt, d.h. jeder logische Beweis basiert auf einer *Subjunktion*. Sie ist die logische Grundstruktur des Beweisens.

2. Die Wahrheitsfrage

Diese logische Struktur reicht allerdings bei weitem nicht aus, um die Wahrheit von Aussagen wirklich zu beweisen. Denn die Logik *allein* kann noch nicht die Begründung von Sätzen garantieren, die sich auf die Realität beziehen, weil hierzu eine inhaltliche Überprüfung mit den wirklichen Sachverhalten erforderlich ist. Ob z. B. eine physikalische Erkenntnis über den Elektromagnetismus *inhaltlich* wahr ist, kann nicht die formale Logik entscheiden, sondern ein überprüfendes Experiment.

Die traditionelle Definition von Wahrheit geht auf Aristoteles zurück, aber Thomas von Aquin formulierte sie so, wie sie heute auch noch vielfach verwendet wird:

> *Wahrheit* ist die Übereinstimmung von Gedanke und Sache.
>
> (*Veritas est adaequatio intellectus et rei.*)
>
> Thomas von Aquin (1225-1274)

Das Wort *Wahrheit* bezeichnet demnach eine besondere *Beziehung* zwischen unseren Gedanken über die Dinge der Welt und den Dingen selbst. Ein Gedanke wird genau dann als wahr verstanden, wenn er sich mit der Sache, die ihm entspricht, in Übereinstimmung befindet. Anderenfalls nennen wir den Gedanken falsch. Ein Beispiel möge dies veranschaulichen: Der Gedanke: „Wasser gefriert bei 0 °C“ ist genau dann wahr, wenn es in der Tat so ist, dass Wasser bei 0 °C gefriert. Die Aussage: „Wasser gefriert bei 0 °C“ ist dann wahr.

Immanuel Kant (1724 - 1804) zeigte in diesem Zusammenhang die Grenzen der formalen Logik auf folgende Weise deutlich auf:

> „Weil aber die bloße Form der Erkenntnis, so sehr sie auch mit logischen Gesetzen übereinstimmen mag, noch lange nicht hinreicht, materielle (objektive) Wahrheit der Erkenntnisse darum auszumachen, so kann sich niemand bloß mit der Logik wagen, über Gegenstände zu urteilen, und irgend etwas zu behaupten, ohne von ihnen vorher gegründete Erkundigung *außer(halb)* der Logik eingezogen zu haben ...”[1]

Das angeführte Zitat zeigt deutlich, dass für Kant die Logik eindeutige Grenzen der Erkenntnisbegründung besitzt. Kant nennt diejenige logische Betrachtungsweise, die ihre eigenen Grenzen *überschreitet* und so tut, als könne sie Erkenntnisse über die außerlogische, „materielle” Wirklichkeit gewinnen, bloß eine „Logik des Scheins”. Diese „Logik des Scheins”, die nach Kant hinsichtlich der „materiellen Wahrheit” der Erkenntnisse nur zum Schein wahre Sätze über die Wirklichkeit hervorbringen kann, nennt er unwissenschaftlich. Insofern muss in einer Beweis*begründung* noch mehr sein als reine Logik.

Wenn das Beweisen, z. B. der Aussage A, darin besteht, dass eine zu beweisende Erkenntnis auf andere schon „früher“ als wahr bekannte Sätze logisch zurückgeführt wird, so erhalten wir aber die folgende Problematik:
Wenn wir die Aussage A als Folge eines bekannten Begründungssatzes B darstellen, dann kann freilich sofort nach der Wahrheit von B selbst gefragt werden, und man müsste B als Folge eines weiteren, noch früheren Begründungssatzes C begreifen. Dann kann man aber wieder nach der Wahrheit von C fragen und so fort. Wir erhalten bei dieser Form des Beweises, bei der eine Aussage A auf weitere Gründe B, C, D usw. zurückgreift, also eine Kette von Begründungen, die immer weiter zurückschreitet, um jedes Kettenglied als Folge eines zuvor bekannten Satzes aufzeigen zu können:

A, weil B   und   B, weil C   und   C, weil D   usw.

Bei dieser Kette von Begründungen für die Aussage A treten nun die folgenden drei Probleme auf:

2.1 Der Zirkelschluss *(circulus vitiosus)*

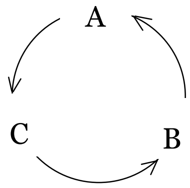
Wenn unter den Begründungssätzen B, C, D, ... die zu beweisende Aussage A selbst wieder auftaucht, etwa D = A, so erhalten wir eine Begründungskette der folgenden Form:

A, weil B   und   B, weil C   und   C, weil A.

Damit wird die zu beweisende Aussage A über einen Umweg auf sich selbst zurückgeführt, also letztlich mit sich selbst bewiesen. Wir erhalten dann lediglich die Tautologie $A \rightarrow A$, die bekanntlich immer *logisch wahr* ist und nichts über den Inhalt von A aussagt. Eine solche Begründungskette, welche die zu beweisende Aussage A selbst als eigenen Beweisgrund enthält, nennen wir auch den „Münchhausen-Schluss”. Dieser Begriff bezieht sich auf eine Romanfigur von Immermann (1796-1840), nämlich auf den „Lügenbaron Münchhausen”, der sich bekanntlich an seinem eigenen Schopf aus dem Wasser gezogen habe will.

In der Logik hat dieser Schluss wegen seiner zirkelhaften Form auch den Namen „Zirkelschluss” oder *circulus vitiosus* (lat. fehlerhafter Zirkel). Mit einem *circulus vitiosus* ist also kein gültiger Beweis einer Aussage A möglich, weil das zu Beweisende ja schon als wahr unterstellt wird und damit ein Beweisgrund seiner selber ist. Man kann die Zirkelhaftigkeit des *circulus vitiosus* anhand der folgenden Skizze sehr deutlich veranschaulichen:

Zirkelschluss



Ein solcher fehlerhafte Zirkelschluss kommt in der praktischen Argumentation häufiger vor als man gemeinhin denkt; denn oft befindet sich in leicht veränderter Sprachform das zu Beweisende versteckt unter den Begründungen, wie das folgende Beispiel zeigt:

> Die Preise steigen, weil die Lohnkosten steigen. Und die Lohnkosten steigen, weil die Gewerkschaften höhere Löhne fordern. Die Gewerkschaften fordern aber höhere Löhne, weil alles teurer geworden ist.

2.2 Das Zurückschreiten ins Unendliche *(regressus ad infinitum)*

Wenn der oben beschriebene Prozess des Zurückgehens von der zu beweisenden Aussage A zu dem wahren Begründungssatz B, dann von dort aus zu der wahren Aussage C, dann weiter zu der wahren Aussage D, ... usw. weder zu A selber (circulus vitiosus) noch zu einer letzten wahren Aussage kommt, dann nennt die traditionelle Philosophie diese Form des Begründens auch den „*regressus ad infinitum*", d.h. „Zurückschreiten ins Unendliche". Durch einen solchen unendlichen Regress aber kann ebenfalls keine Wahrheit gesichert werden. Das lehren die Gesetze der Grundschlüsse; denn es kann kein Satz A lediglich mit Hilfe von Subjunktionen bewiesen werden:

$$\begin{array}{l} E \rightarrow D \\ D \rightarrow C \\ C \rightarrow B \\ B \rightarrow A \\ \hline E \rightarrow A. \end{array}$$

Der Kettenschluss liefert hier zwar die Wahrheit der Subjunktion E → A, aber nicht die Wahrheit von A selber, wenn E nicht sicher wahr ist.

Dies bedeutet aber, dass in der Begründungskette

A, weil B   und   B, weil C   und   C weil D ... usw.

mindestens ein Begründungssatz wahr sein muss, um mit Hilfe des Modus-ponens-Schlusses die Wahrheit von A zu sichern. Insofern ist auch der regressus ad infinitum kein probates Mittel, einen sicheren Beweis für die Wahrheit einer Aussage zu liefern.

Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

> Die Zahl 15 ist ungerade, weil die folgende Zahl 16 gerade ist. Und 16 ist gerade, weil die folgende 17 ungerade ist. Und 17 ist ungerade, weil die folgende 18 gerade ist usw.

Wir sehen, dass es sich hierbei um eine unendliche Folge von Verweisen auf andere Behauptungen handelt, so dass damit kein triftiger Beweis für die Wahrheit des Satzes "Die Zahl 15 ist eine ungerade Zahl" gegeben ist. Dies ist also eine fehlerhafte Argumentation in Form eines Zurückschreitens ins Unendliche. Der korrekte Beweis müsste lauten: Die Zahl 15 ist eine ungerade Zahl, weil sie nicht ohne Rest durch 2 teilbar ist.

2.2 Der axiomatische Beweis *(demonstratio ad axiomas)*

Bei dem Bestreben, alles beweisen und begründen zu wollen, stoßen wir also auf das folgende Problem: Jede Form des Beweisens, bei der argumentativ auf andere wahre Begründungssätze zurückgegriffen wird, enthält das unausweichliche Dilemma zwischen *circulus vitiosus* und *regressus ad infinitum*. Um diesem Dilemma auszuweichen, hat man sich in der Philosophie und Mathematik dazu entschlossen, bestimmte Sätze *unbewiesen* (!) als wahr *vorauszusetzen*, um damit eine Begründungskette zu verankern. Diese unbewiesenen, vorausgesetzten Grundsätze heißen *Axiome*.

Der Begriff des Axioms kommt aus der altgriechischen Sprache und leitet sich von dem Verb *axioun* her, das ursprünglich im Sinne von „einschätzen, wertschätzen, annehmen, für richtig halten“ gebraucht wird. Aristoteles benutzt das davon abgeleitete Substantiv *axioma*, um damit einen anerkannten Grundsatz zu bezeichnen, der als Ausgangssatz der beweisenden Wissenschaften „unvermittelt, leichter einzusehen sowie früher“ als das aus ihm Bewiesene ist und dieses begründet. Axiome sind also für wahr gehaltene und auch als wahr vorausgesetzte Basissätze, die in der Wissenschaft anerkannt werden und aus denen man dann die weiteren Sätze mit Hilfe der logischen Argumentation beweist.

Euklid von Alexandria (365-300 v.u.Z) war wohl der erste, der die Erkenntnisse einer Wissenschaft, nämlich der Geometrie, ganz streng auf einer Basis von Axiomen erstellt hatte. In seinem berühmten Werk „Die Elemente” beginnt Euklid seine Geometrie zunächst mit *Definitionen*, dann mit *Postulaten* (lat. *postulatum* heißt Forderung) und schließlich mit *allgemein angenommenen Meinungen*, bevor er anfängt, die Lehrsätze der Geometrie zu *beweisen*. Seine „Elemente” in der Darstellung von Oskar Becker[2] beginnen in folgender Weise:

> „*Definitionen:*
> 1. Ein *Punkt* ist, was keinen Teil hat.
> 2. Eine *Linie* ist breitenlose Länge.
> 3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
>
> *Postulate:*
>
> Gefordert soll sein:
> 1. dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
> 2. dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
> 3. dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.
>
> *Allgemein angenommene Meinungen (Axiome)*:
> 1. Was demselben gleich ist, ist untereinander gleich.
> 2. Wenn Gleiches zu Gleichem hinzugefügt wird, sind die Summen (die Ganzen) gleich.
> 3. Wenn Gleiches von Gleichem abgezogen wird, sind die Reste gleich.
> 4. Was sich deckt, ist gleich.
> 5. Das Ganze ist größer als der Teil.“ [3]

Obwohl Euklid das Wort „axioma” selbst nicht verwendet, sondern von *„allgemeinen Meinungen*” oder *„allgemeinen Vorstellungen*” (*koinai ennoiai*) spricht, hat der bedeutende Euklid-Kommentator Proklos (411-485) zu diesen allgemeinen Vorstellungen folgendes angemerkt:

„Sie sind die von allen als unbeweisbar erklärten Axiome, insofern ihre Richtigkeit von allen anerkannt und von niemandem in Zweifel gezogen wird".[4]

Die Elemente des Euklid waren länger als 2000 Jahre - und sind auch heute noch - *das* Musterbeispiel für eine „exakte" Wissenschaft. Sie dienten nicht nur als Vorbild für die mathematische Methode, sondern wurden auch in anderen Wissenschaften nachgeahmt, die ihre Erkenntnisse dann *more geometrico* (= nach Art der [euklidischen] Geometrie) darstellen wollten. So hat z. B. Isaac Newton (1643 - 1727) mit seinem Werk „Mathematische Prinzipien der Naturwissenschaft" in der Physik versucht, die Mechanik axiomatisch aufzubauen.
In der Philosophie war es Baruch de Spinoza (1632 - 1677), der sein Werk „Ethik" ebenfalls auf axiomatische Grundlagen stellte und dies sogar im Untertitel seines Buches durch den Hinweis „mit geometrischer Methode begründet" (*ordine geometrico demonstrata*) ausdrücklich dokumentierte. Und er beginnt auch zunächst mit einigen Definitionen und anschließend dann mit dem Fundament seiner Argumentation:

„Axiome:

1. Alles, was ist, ist entweder in sich oder in einem Anderen.
2. Das, was nicht durch ein anderes begriffen werden kann, muss durch sich begriffen werden.
3. Aus einer gegebenen bestimmten Ursache erfolgt notwendig eine Wirkung; und umgekehrt, wenn es keine bestimmte Ursache gibt, kann unmöglich eine Wirkung erfolgen.“ [5]

Wir sehen, dass die Alternative zu dem *circulus vitiosus* einerseits und dem *regressus ad infinitum* andererseits darin besteht, das Beweisen oder Begründen auf eine axiomatische Grundlage zu stellen. Von dieser Basis aus werden so mit Hilfe von „wenn-dann"-Beziehungen die Begründungen durchgeführt. Hier findet das Wort „Begründung" seinen ursprünglichen Sinn; denn mit den Axiomen wird der *Grund* oder der *Boden* bereitet für die Aufstellung von Beweisen.

Der Beweis selber ist dann eine logische Implikation, d.h. eine gültige Schlussfolgerung von den Axiomen hin zu der zu beweisenden Aussage A. Eine solche Implikation zwischen Axiomen und einer zu beweisenden Aussage heißt ein *axiomatischer Beweis* oder eine *demonstratio ad axiomas* (= Beweis aufgrund von Axiomen). Genauer gilt:

Unter einem axiomatischen Beweis einer Aussage A (demonstratio ad axiomas) verstehen wir eine *gültige Schlussfolgerung* der folgenden Form:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \quad \Rightarrow \quad A,$$

wobei die Prämissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die zugrunde liegenden Axiome sind.
Die Aussage A gilt dann aufgrund der Axiome $A_1, A_2, \ldots, A_n$ als *bewiesen*.

Im Rahmen des axiomatischen Beweises unterscheiden wir noch 3 Formen:

a) Der direkte Beweis

Neben den Axiomen und Definitionen können aber auch bestimmte, schon vorher bewiesene Sätze als Prämissen eines Beweises vorausgesetzt werden. Damit ergibt sich die folgende Definition des direkten Beweises:

Unter einem direkten (logischen) Beweis einer Aussage A verstehen wir eine *Implikation* der folgenden Form:

$$S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_n \quad \Rightarrow \quad A.$$

Die Prämissen S_1, S_2, ..., S_n bestehen dabei aus *Axiomen* oder aus vorher schon *bewiesenen Sätzen* oder aus *Definitionen*.

b) Der indirekte Beweis

Wenn in der Wissenschaft etwas bewiesen werden soll, so geschieht dies häufig *indirekt*, das heißt, man geht von dem Gegenteil dessen aus, was man beweisen will, und zeigt dann, dass dies zur Negation der Voraussetzung führt. Wir betrachten ein Beispiel aus der Mathematik und beweisen den folgenden Satz:

> Wenn das Quadrat x^2 einer natürlichen Zahl x ungerade ist,
> dann ist auch die Zahl x selbst ungerade.

Diesen Beweis führen wir indirekt. Wir nehmen also an, dass x gerade ist, also x ist ohne Rest durch 2 teilbar. Dann lässt sich x als Produkt $x = 2 \cdot n$ darstellen, wobei n wieder eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt, dass das Quadrat $x^2 = (2 \cdot n)^2 = 4 \cdot n^2$ durch 4, und damit auch durch 2 teilbar ist. Also ist x^2 dann gerade. Das ist ein aber Widerspruch zur Voraussetzung, dass x^2 ungerade sein soll.

Damit ist der Satz bewiesen. Aber worin besteht nun eigentlich die logische Beweisstruktur? Eine logische Betrachtung des Satzes zeigt, dass hier im Wesentlichen eine Subjunktion $A \to B$ zu beweisen war; denn, da A als wahr vorausgesetzt war, so folgt aus der bewiesenen Subjunktion die Wahrheit von B. Dies geschah aber nicht direkt auf dem Weg von A nach B, sondern indirekt von der Negation $\overline{B}$ zur Negation $\overline{A}$, d.h., wir haben inhaltlich die Wahrheit der *Kontraposition* $\overline{B} \to \overline{A}$ nachgewiesen und damit zugleich aus *logischen* Gründen auch die Wahrheit der Subjunktion $A \to B$; denn nach dem Gesetz von der Kontraposition sind beide Verknüpfungen ja äquivalent:

$$A \to B \Leftrightarrow \overline{B} \to \overline{A}.$$

Dieses Gesetz von der Kontraposition ist die logische Grundlage eines jeden indirekten Beweises!

c) Der Beweis durch Widerspruch (gegen eine bekannte wahre Aussage)

Eine verwandte Form des indirekten Beweises bildet jene Schlussfolgerung, deren Konklusion in einer nachweislich *falschen* Aussage besteht. Auch hier geht man von dem Gegenteil dessen aus, was man beweisen will, und zeigt, dass dies zu einem Widerspruch gegen eine als wahr bekannte Aussage führt. Anhand eines Beispiels aus der Mathematik wollen wir zunächst die logische Struktur eines solchen Beweises durch Widerspruch vorstellen. Wir beweisen dazu einmal den folgenden Satz:

> Für alle Zahlen x gilt stets die Ungleichung: $x + 1 \neq x$.

Wir nehmen also an, das Gegenteil sei wahr. Dann würde für mindestens eine Zahl x die Gleichung: $x + 1 = x$ gelten. Wenn wir nun aber auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl x subtrahieren, so erhalten wir „$1 = 0$". Dies ist aber eine falsche Aussage; denn bekanntlich ist $1 \neq 0$. Der Satz ist damit bewiesen.

Aber worin besteht die logische Form dieses Beweises?

Die zu beweisende Aussage A, die Ungleichung: $x + 1 \neq x$, wird zunächst negiert. Die Negation $\overline{A}$, d.h. die *Gleichung*: $x + 1 = x$, und die Umformregel für Gleichungen (auf beiden Seiten der Gleichung darf dieselbe Zahl subtrahiert werden) als Prämisse (P) bilden zusammen die Voraussetzungen eines Schlusses, der zu der falschen Aussage

„1 = 0” als Konklusion K führt. K ist aber die Negation eines bekannten wahren Satzes S: „1 ≠ 0”, so dass die Konklusion K (= $\overline{S}$) und der Satz S einen Widerspruch darstellen. Der vorige Beweis hat demnach die folgende Struktur:

$$\overline{A} \wedge P \;\rightarrow\; \overline{S} \quad (= F).$$

Wenn wir also die Wahrheit der Subjunktion: $\overline{A} \wedge P \rightarrow \overline{S}$ mit einem wahren Satz S nachweisen, dann weisen wir *formallogisch äquivalent* zugleich auch die Wahrheit der Subjunktion $P \rightarrow A$ nach. Mit anderen Worten: Aus der Prämisse P (Umformungsregel für Gleichungen) und der Negation $\overline{A}$ ist mit Hilfe eines Widerspruch $\overline{S}$ (= F) zu dem wahren Satz S letztlich die zu beweisende Aussage A: $x + 1 \neq x$ logisch geschlossen worden. Wir können dieses Ergebnis wie folgt festhalten:

> Wenn nachgewiesen werden muss, dass die folgende Subjunktion
>
> $S \rightarrow A$ wahr ist und wenn S ein bekannter *wahrer* Satz ist (S = W),
>
> dann ist es *logisch äquivalent* nachzuweisen, dass die folgende abgewandelte Subjunktion: $\overline{A} \wedge S \rightarrow \overline{S}$ eine Implikation ist.
>
> Wir nennen dann diese *Implikation*: $\overline{A} \wedge S \Rightarrow \overline{S}$ einen *Beweis* von A *durch* einen *Widerspruch* (zu S).

Bemerkung:

In der logischen Literatur wird zwischen einem *indirekten Beweis* und einem *Beweis durch Widerspruch* nicht immer terminologisch genau unterschieden. Dies ist nicht korrekt; denn es gibt zwar viele Gemeinsamkeiten, doch es gibt auch einen entscheidenden Unterschied zwischen beiden Beweisarten. Gemeinsam ist bei beiden, dass sie von der Negation der zu beweisenden Aussage ausgehen und diese Negation als wahr annehmen. Doch der wesentliche Unterschied zwischen ihnen besteht darin, dass der indirekte Beweis die Negation eines der vorausgesetzten Axiome oder Sätze hervorbringt, während der Beweis durch Widerspruch die Negation eines *anderen* wahren Satzes impliziert, der aber nicht direkt zu den Voraussetzungen der zu beweisenden Aussage gehört.

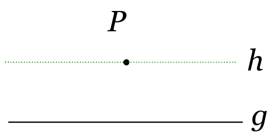
Zusammenfassung

Die vorhergehende Darstellung hat gezeigt, dass alle Beweise, ganz gleich in welcher Weise sie durchgeführt werden, immer gewisser Voraussetzungen bedürfen, die am Anfang einer Beweisführung stehen. Ein absoluter, quasi aus dem „Nichts“ geführter Beweis ist nicht möglich. Denn bei dem Versuch, eine zu beweisende Aussage auf andere Aussagen zurückzuführen, geraten wir unausweichlich in eine Zwangslage von genau drei Möglichkeiten: circulus vitiosus, regressus ad infinitum oder demonstratio ad axiomas.

Alle beweisenden Wissenschaften haben sich nun für das „kleinere Übel“ entschieden und das Begründen und Beweisen auf die Grundlage von Axiomen gestellt. Die Axiome sind damit die Anker des Beweisens. Sie selbst sind unbewiesen, sind oft aus der Erfahrung entnommen und bilden solange die Grundlagen einer wissenschaftlichen Theorie, bis neuere Erkenntnisse eine Revision der Grundsätze nahe legen. Ein Beispiel für eine solche Revision liegt z. B. in der Mathematik vor, und zwar beim berühmten Parallelenaxiom (5. Postulat der “Elemente”) des Euklid, das die Geschichte der Mathematik mehr als 2000 Jahre in Atem gehalten hat, weil immer wieder versucht worden ist, dieses Postulat zu beweisen, also aus den anderen Axiomen herzuleiten.

Das Parallelenaxiom kann folgendermaßen formuliert werden: Wenn eine Gerade *g* und ein nicht auf dieser Geraden *g* liegender äußerer Punkt *P* gegeben ist, dann gibt es *genau eine* Gerade *h*, die durch P geht und zu der Geraden *g* parallel verläuft.

Parallelenaxiom



Erst im 19. Jahrhundert ist es dem ungarischen Mathematiker János Bolyai (1802-1860) und zeitgleich (ab etwa 1815) dem russischen Mathematiker Nikolai Lobatschewski (1792-1856) gelungen, die Unabhängigkeit dieses Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen nachzuweisen und es sogar durch ein anderes zu ersetzen. Man nennt eine Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, eine *nichteuklidische* Geometrie. Interessanterweise hat die moderne Physik, insbesondere die Relativitätstheorie von Einstein, gezeigt, dass die nichteuklidische Geometrie die Naturgesetze viel angemessener beschreibt als die alte euklidische Geometrie.

Spätestens seit Euklid hat die Mathematik die Axiomatisierung ihrer Wissenschaft am radikalsten zu ihrer Methode erklärt. Insofern kann dem Vorurteil widersprochen werden, dass die Mathematik alles beweisen könne. Das kann sie prinzipiell nicht! Ja, es ist gerade die Mathematik, die die „Flucht nach vorne“ angetreten hat und sich ausdrücklich als eine axiomatische Wissenschaft begreift. Ihre Beweise basieren auf vorgegebenen Axiomen (häufig auch Postulate genannt) und Definitionen. Aus ihnen werden die mathematischen Sätze dann als Konklusionen gültiger Schlussfolgerungen geschlossen. Dadurch und nur dadurch gelten sie bewiesen.

Siehe: Reiner Winter, Grundlagen der formalen Logik

Anmerkungen

1 Kant, Kritik der reinen Vernunft, Akademie-Ausgabe, B 85. Die Klammern wurden zum besseren Verständnis von mir gesetzt.

2 Oskar Becker, Grundlagen der Mathematik, S. 88 ff.

3 Euklid, Elemente, zitiert nach Oskar Becker, a. a. O.

4 Proklos, zitiert nach Oskar Becker, a. a. O. S. 98 ff.

5 Spinoza, Ethica I