FORMELSAMMLUNG

A. Ableitungsformeln und Integralformeln

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0	$c \cdot x$
x	1	$\frac{x^2}{2}$
x^n, $(n \in \mathbb{N})$	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\ln\|x\|$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \neq 1)$	$-\frac{n}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$	$\frac{1}{(-n+1) \cdot x^{n+1}} = \frac{1}{(-n+1)} \cdot x^{-n+1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$	$\frac{n}{n+1} \cdot \sqrt[n]{x^{n+1}} = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$
x^r, $(r \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$	$r \cdot x^{r-1}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$1 + (\tan x)^2$	$-\ln\|\cos x\|$
$\cot x$	$-[1 + (\cot x)^2]$	$\ln\|\sin x\|$
e^x	e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \cdot \ln x - x$

B. Ableitungsregeln

	$f(x)$		$f'(x)$
1. Faktorregel ($c \in \mathbb{R}$)	$c \cdot g(x)$	$\Rightarrow$	$c \cdot g'(x)$
2. Summenregel	$g(x) \pm h(x)$	$\Rightarrow$	$g'(x) \pm h'(x)$
3. Produktenregel	$g(x) \cdot h(x)$	$\Rightarrow$	$g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
4. Quotientenregel	$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\Rightarrow$	$\frac{h(x) \cdot g'(x) - h'(x) \cdot g(x)}{[h(x)]^2}$
5. Kettenregel	$g(h(x))$	$\Rightarrow$	$g'(h(x)) \cdot h'(x)$

C. Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

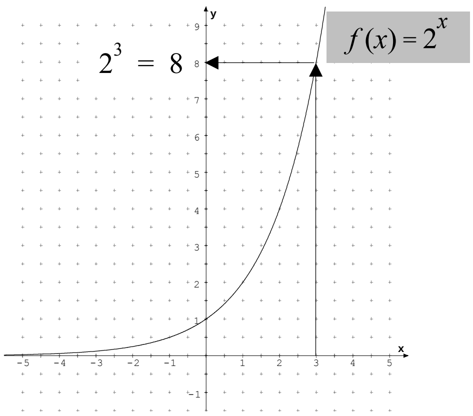
Zwischen Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion besteht der folgende Zusammenhang:

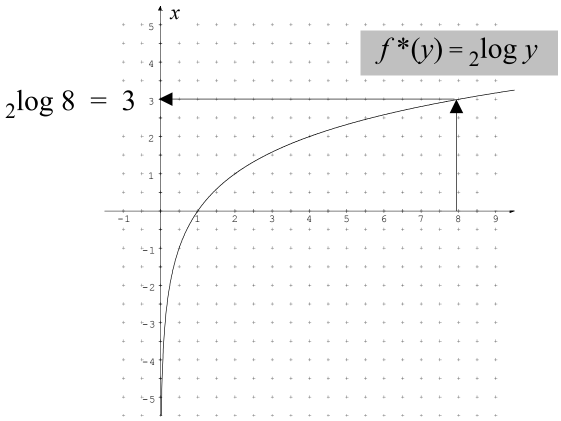
$$f(x) = a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad {}_a\log y = x = f^*(y)$$

$$a \in \mathbb{R}^+; \quad x \in \mathbb{R}; \quad y \in \mathbb{R}^+.$$

Die Logarithmusfunktion: $f^*(y) = {}_a\log y$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion: $f(x) = a^x$.

Ein Beispiel: $f(x) = 2^x$ und die Umkehrfunktion: $f^*(y) = {}_2\log y$:





$$3 \xrightarrow{2^x} 8 \xrightarrow{{}_2\log y} 3 \qquad\qquad 8 \xrightarrow{{}_2\log y} 3 \xrightarrow{2^x} 8$$

$$ {}_2\log(2^3) = 3 \qquad\qquad 2^{{}_2\log 8} = 8$$

Wichtige Formeln

für: a, y, r, s > 0 ; $x \in \mathbb{R}$ beliebig

I. Grundlagen:

1. $a^x > 0$ (für alle $x \in \mathbb{R}$)
2. ${}_a\log y \in \mathbb{R}$ (nur für $y \in \mathbb{R}^+$)
3. ${}_a\log 0 \notin \mathbb{R}$
4. $a^1 = a$
5. ${}_a\log a = 1$
6. $a^{{}_a\log y} = y$
7. $a^0 = 1$
8. ${}_a\log 1 = 0$
9. ${}_a\log(a^x) = x$.

II. Grundformeln:

1. ${}_a\log(r \cdot s) = {}_a\log r + {}_a\log s$
2. ${}_a\log\left(\frac{r}{s}\right) = {}_a\log r - {}_a\log s$
3. ${}_a\log\left(\frac{1}{s}\right) = -{}_a\log s$
4. ${}_a\log r^s = s \cdot {}_a\log r$.

III. Die Basen 10 und e $= \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718$

(Abkürzungen: lg $= {}_{10}\log$ und ln $= {}_e\log$)

1. $10^{\lg y} = y$
2. $\lg(10^x) = x$
3. $a^x = 10^{\lg a \cdot x}$
4. $a^x = y \Leftrightarrow x = \frac{\lg y}{\lg a}$
5. ${}_a\log y = \frac{\lg y}{\lg a}$
6. $e^{\ln y} = y$
7. $\ln(e^x) = x$
8. $a^x = e^{\ln a \cdot x}$
9. $a^x = y \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$
10. ${}_a\log y = \frac{\ln y}{\ln a}$

IV. Ableitungen

($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

1. $[\,e^x\,]' = e^x$
2. $[\,\ln y\,]' = \frac{1}{y}$
3. $[\,a^x\,]' = \ln a \cdot a^x$
4. $[\,{}_a\log y\,]' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{y}$

D. Allgemeine Regeln für uneigentliche Grenzwerte

Im Folgenden werden Grenzwertregeln aufgeführt, die für *alle* fünf Grenzwertfälle:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (4) $\text{l-}\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (5) $\text{r-}\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

in gleicher Weise gelten. Wir schreiben nun einheitlich für alle Fälle kurz: $\mathbf{lim}\ \boldsymbol{f(x)}$.

1. Regel:

a) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in \mathbb{R}$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$

Kurzform*:

Behauptung: $\lim [\, g(x) + h(x) \,] = \pm\infty$

$[\, c + (+\infty) = +\infty \,]$

$[\, c + (-\infty) = -\infty \,]$

b) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = \pm\infty$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$

Kurzform:

Behauptung: $\lim [\, g(x) + h(x) \,] = \pm\infty$

$[\, (+\infty) + (+\infty) = +\infty \,]$

$[\, (-\infty) + (-\infty) = -\infty \,]$

Ausnahmen: Die Beziehung: $(+\infty) + (-\infty)$ ist nicht definiert.

Lösungsmöglichkeiten:

Durch Termumformungen, Ausklammern usw. auf bekannte Regeln (z.B. auch de l'Hospital) zurückführen.

2. Regel:

a) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$

Kurzform:

Behauptung: $\lim [\, g(x) \cdot h(x) \,] = \pm\infty$

$[\, c \cdot (+\infty) = +\infty$ für $c > 0 \,]$

$[\, c \cdot (-\infty) = -\infty$ für $c > 0 \,]$

$[\, c \cdot (+\infty) = -\infty$ für $c < 0 \,]$

$[\, c \cdot (-\infty) = +\infty$ für $c < 0 \,]$

b) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = \pm\infty$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$

Kurzform:

Behauptung: $\lim [\, g(x) \cdot h(x) \,] = \pm\infty$

$[\, (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \,]$

$[\, (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty \,]$

$[\, (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \,]$

$[\, (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \,]$

Ausnahmen: Die folgenden Beziehungen

$0 \cdot (+\infty)$ und $0 \cdot (-\infty)$ sind nicht definiert.

Lösungsmöglichkeiten:

Durch Termumformungen, Ausklammern usw. auf bekannte Regeln (z.B. auch de l'Hospital) zurückführen.

***) Bemerkung:**

Die folgenden Kurzformen stellen keine algebraischen Terme dar; es sind lediglich einprägsame, symbolische Merkregeln. Sie werden daher auch in eckige Klammern geschrieben.

3. Regel:

a) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) $\lim h(x) = \pm\infty$

Behauptung: $\boxed{\lim \frac{g(x)}{h(x)} = 0}$

Kurzform:

$[\ \frac{c}{+\infty} = 0$ für $c \neq 0\ ]$

$[\ \frac{c}{-\infty} = 0$ für $c \neq 0\ ]$

b) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = \pm\infty$

(2) $\lim h(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Behauptung: $\boxed{\lim \frac{g(x)}{h(x)} = \pm\infty}$

Kurzform:

$[\ \frac{+\infty}{c} = +\infty$ für $c > 0\ ]$

$[\ \frac{+\infty}{c} = -\infty$ für $c < 0\ ]$

$[\ \frac{-\infty}{c} = -\infty$ für $c > 0\ ]$

$[\ \frac{-\infty}{c} = +\infty$ für $c < 0\ ]$

c) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \neq 0$ oder $\lim g(x) = \pm\infty$
(2) $\lim h(x) = 0$

Behauptung: $\boxed{\lim \left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| = +\infty}$

Kurzform:

$[\ \left|\frac{\pm\infty}{0}\right| = +\infty\ ;\ \left|\frac{c}{0}\right| = +\infty$ für $c \neq 0\ ]$

(Ohne Betragstriche: Vorzeichen beachten!)

Ausnahmen: Die folgenden Beziehungen $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ und $\frac{0}{0}$ sind nicht definiert.
Lösungsmöglichkeiten: die Regeln von de l'Hospital anwenden.

4. Regel:

a) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in [0, 1[$

(2) $\lim h(x) = +\infty$

Behauptung: $\boxed{\lim g(x)^{h(x)} = 0}$

Kurzform:

$[\ c^{+\infty} = 0$ für $0 \leq c < 1\ ]$

[Beachte: $c^{-\infty} = +\infty$ für $0 \leq c < 1$]

b) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = c \in]1, \infty[$

(2) $\lim h(x) = +\infty$

Behauptung: $\boxed{\lim g(x)^{h(x)} = +\infty}$

Kurzform:

$[\ c^{+\infty} = +\infty$ für $1 < c\ ]$

[Beachte: $c^{-\infty} = +0$ für $1 < c$]

c) Voraussetzungen: (1) $\lim g(x) = +\infty$

(2) $\lim h(x) = +\infty$

Behauptung: $\boxed{\lim g(x)^{h(x)} = +\infty}$

Kurzform:

$[\ (+\infty)^{+\infty} = +\infty\ ]$

[Beachte: $(+\infty)^{-\infty} = 0$]

Ausnahmen: Die folgenden Beziehungen: $1^{\pm\infty}$, $(+\infty)^0$ und 0^0 sind nicht definiert.
Lösungsmöglichkeiten:
Umformen (e-Funktion!) und die Regeln von de l'Hospital anwenden.

E. Die Grenzwertregeln von de l'Hospital

Im Folgenden seien *f, g* und *h* Funktionen mit der Bedingung: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

---

1. Regel von de l'Hospital

Kurzform: $[\ \frac{0}{0}\ ]$ für $x \to x_0$

Voraussetzungen:

(1) $g(x_0) = h(x_0) = 0$ (2) $g'(x_0)$ und $h'(x_0)$ existieren (3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert

Behauptung:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{1 - x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x \cdot (-1)} = -1$

---

2. Regel von de l'Hospital

Kurzform: $[\ \frac{0}{0}\ ]$ für $x \to \infty$

Voraussetzungen:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 0$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert

Behauptung:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\arctan x - \pi/2}{1/x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) / \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^2}{1+x^2} = -1$

---

3. Regel von de l'Hospital

Kurzform: $[\ \frac{g(x)}{\pm\infty}\ ]$ für $x \to x_0$

Voraussetzungen:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \pm\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert

Behauptung:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{1 \cdot x}{1} = 0$

---

4. Regel von de l'Hospital

Kurzform: $[\ \frac{g(x)}{\pm\infty}\ ]$ für $x \to \infty$

Voraussetzungen:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \pm\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{g'(x)}{h'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert

Behauptung:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

F. Formeln der Stochastik

$A = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ — Allgemeines Zählprinzip, auf jeder Stufe k gibt es m_k Möglichkeiten.

$A = n^k$ — Anzahl der geordneten k -Tupel aus einer n-elementigen Menge **mit Wiederholung**

$A = \frac{n!}{(n-k)!}$ — Anzahl der k-Permutationen aus einer n-elementigen Menge **ohne Wiederholung**

$A = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ — Anzahl der k-Kombinationen, d.h. der k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge **ohne Wiederholung**!

Hypergeometrische Verteilung

$$P(E) = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \cdot \binom{n_3}{k_3}}{\binom{n}{k}}$$

Aus einer Gesamtheit von:
$n = n_1 + n_2 + n_3$ Dingen werden
$k = k_1 + k_2 + k_3$ herausgegriffen.

Bernoulli-Kette

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

n-Stufiger Bernoulliversuch, 2 Ausgänge
p: Erfolgswahrscheinlichkeit,
q: = 1 – p Mißerfolgswahrscheinlichkeit
X: Anzahl der Erfolge

Erwartungswert μ_X der Zufallsgröße X

$$\mu_X = E(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot p_k$$

Bernoulli: $\mu_X = n \cdot p$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$: Werte der Zufallsgröße X
$p_1 = P(X = a_1),\ p_2 = P(X = a_2), \ldots, p_n = P(X = a_n)$,
Wahrscheinlichkeiten

Varianz V(X) der Zufallsgröße X

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - \mu_X)^2 \cdot p_k$$

Bernoulli: $V(X) = n \cdot p \cdot q$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$; $\frac{\sigma}{n} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$: Werte der Zufallsgröße X
$p_1 = P(X = a_1),\ p_2 = P(X = a_2), \ldots, p_n = P(X = a_n)$,
Wahrscheinlichkeiten
μ_X: Erwartungswert und σ_X: Standardabweichung.

$2 \cdot \sigma$ - Umgebung: $U_{2\sigma}(\mu)$ $P(\{X / \mu - 2 \cdot \sigma \le X \le \mu + 2 \cdot \sigma\}) = 0{,}955$

$\frac{2\sigma}{n}$ - Umgebung: $U_{\frac{2\sigma}{n}}(p)$ $P(\{X / p - \frac{2\sigma}{n} \le \frac{X}{n} \le p + \frac{2\sigma}{n}\}) = 0{,}955$

Konfidenzintervalle: $\left| \frac{x}{n} - p \right| \le \frac{2\sigma}{n} \Leftrightarrow \left| \frac{x}{n} - p \right| \le 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{n} - p \right)^2 \le \frac{4 \cdot p \cdot (1-p)}{n}$

Notwendiger Stichprobenumfang bei vorgegebener Stichprobendifferenz d zu p:

$$\left| \frac{x}{n} - p \right| = \frac{2\sigma}{n} \le d \Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \le d \Leftrightarrow 4 \cdot p \cdot (1-p) \le n \cdot d^2 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot p \cdot (1-p)}{d^2} \le n$$